Kapitel 10

Grundlagen der Entscheidungstheorie

<u>B. 10. 1.</u> (*Gegenstand*)
Die *Entscheidungstheorie* befasst sich mit dem Entscheidungsverhalten von Individuen und Gruppen.
Sie besteht aus zwei Teilgebieten

1. *Deskriptive Entscheidungstheorie*
   Die deskriptive Entscheidungstheorie beschreibt wie Entscheidungen in der Realität getroffen werden.

2. *Präskriptive (normative) Entscheidungstheorie*
   Die präskriptive (normative) Entscheidungstheorie formuliert, wie entschieden werden soll, damit die Entscheidung im Rahmen *festgelegter Regeln* „optimal“ bzw. „rational“ ausfällt.

<u>B. 10. 2.</u>
Wie werden uns in diesem Kapitel lediglich mit präskriptiver (normativer) Entscheidungstheorie befassen.

<u>B. 10. 3.</u> (*Einteilung der präskriptiven Entscheidungstheorie*)
Die Entscheidungsprobleme sich nach verschiedenen Kriterien einteilen:

I. *Anzahl der Zielgrößen*

a) Einkriteriell (eine Zielgröße)
b) Mehrkriteriell (mehrere Zielgrößen)

II. *Kenntnisse über die Zustände*[1]

a) Entscheidung unter Sicherheit
b) Entscheidung unter Ungewissheit
c) Entscheidung unter Risiko

III. *Zeithorizont*

a) Statische (die Zielgröße hängt von einer Entscheidung ab)
b) Dynamische (im Zeitablauf werden wiederholt Entscheidungen getroffen)

[1] Siehe detailliert hierzu später.

IV. „Gegenspieler“

a) Die Zustände werden nur von der „Umwelt“ bestimmt.
b) Die Zustände werden auch von „rational“ handelnden „Gegenspielern“ bestimmt

V. Formen von Entscheidungen

a) Entscheidungsträger ist ein Individuum
b) Entscheidungsträger ist eine Gruppe

<u>D. 10. 1</u> (*Entscheidungstabelle, Entscheidungsmatrix*)
Folgende Tabelle (Matrix) heißt *Entscheidungstabelle* (*Entscheidungsmatrix*):

	z_1	.	.	.	z_j	.	.	.	z_n
a_1	x_{11}	.	.	.	x_{1j}	.	.	.	x_{1n}
.	.				.				.
.	.				.				.
.	.								
a_i	x_{i1}	.	.	.	x_{ij}	.	.	.	x_{in}
.	.				.				.
.	.				.				.
.	.				.				.
a_m	x_{m1}	.	.	.	x_{mj}	.	.	.	x_{mn}

Dabei sind:

a_i: Alternative $i = 1, 2, ..., m$;
z_j: Zustand $j = 1, 2, ..., n$;
x_{ij}: Konsequenz aus dem Zusammentreffen von Alternative a_i mit Zustand z_j.

<u>D. 10. 2.</u> (*Einteilung der Entscheidungsprobleme*)
Bezüglich der *Kenntnisse über die Zustände* werden folgende Entscheidungsprobleme definiert:

(1) Entscheidung unter Sicherheit
Die eintretenden Zustände sind bekannt

(2) Entscheidung unter Ungewissheit
Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Zustände sind nicht bekannt. Daher werden sie als gleich wahrscheinlich angenommen.

(3) Entscheidung unter Risiko
Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Zustände sind bekannt.

B. 10. 4. (***Dominanz***)
Zur Vereinfachung des Entscheidungsproblems sollten diejenigen Alternativen nicht betrachtet werden, die von anderen Alternativen dominiert werden.
Wir unterscheiden u.a.[2]

1. Absolute Dominanz
2. Zustandsdominanz

D. 10. 3. (***Absolute Dominanz***)
Eine Alternative a_i dominiert eine Alternative a_j *absolut*, wenn das geringstmögliche Konsequent (Ergebnis) von a_i nicht kleiner ist als das größtmögliche Ergebnis von a_j:

$$a_i \succ a_j \quad \Leftrightarrow \quad \min_k x_{ik} \geq \max_k x_{jk}$$

BS. 10. 1.

x_{ij}	z_1	z_2	z_3
a_1	70	80	10
a_2	50	90	20
a_3	20	10	20

a_2 dominiert a_3.

D. 10. 4. (***Zustandsdominanz***)
Nach dem Prinzip der Zustandsdominanz dominiert die a_i die Alternative a_j, wenn beim paarweisem Vergleich die Ergebnisse von a_i in keinem Zustand schlechter als jene von a_j sind und in mindestens einem Zustand a_i zu einem besseren Ergebnis als a_j führt:

$$a_i \succ a_j \quad \Leftrightarrow \quad x_{ik} \geq x_{jk} \;\; \forall k = 1,2,...,m \;\wedge\; \exists k : x_{ik} > x_{jk}$$

BS. 10. 2.

x_{ij}	z_1	z_2	z_3
a_1	70	80	30
a_2	50	90	20
a_3	50	85	20

a_2 dominiert a_3.

D. 10. 5. (***Effiziente und Nichteffiziente Alternativen***)
Eine Alternative heißt *effizient*, wenn sie von keiner Alternative dominiert wird; sonst heißt sie *ineffizient*.

---
[2] Es gibt auch weitere Dominanzbegriffe, z.B. stochastische Dominanz, die hier nicht behandelt werden.

B. 10. 5.
Zur Vereinfachung des Entscheidungsproblems sollten diejenigen Alternativen nicht betrachtet werden, die von anderen Alternativen dominiert werden (die sog. *Ineffizienten Alternativen*).

B. 10. 6. **(*Entscheidung unter Sicherheit*)**
Im Falle der Entscheidung unter Sicherheit hat man für $n = 1$ folgende Entscheidungstabelle:

Alternative	Zustand
a_1	x_1
.	.
.	.
.	.
a_i	x_i
.	.
.	.
.	.
a_m	x_m

Typische Fälle für Entscheidungsprobleme unter Sicherheit sind deterministische Optimierungsprobleme.

B. 10. 7. **(*Entscheidung unter Ungewissheit*)**
Von einer Entscheidungssituation unter Ungewissheit wird gesprochen, wenn einer Alternative mehrerer Zustände zugeordnet werden kann, wobei aber keine Kenntnis über deren Eintrittswahrscheinlichkeit vorliegt.
Man könnte auch sagen, dass die Zustände gleichwahrscheinlich sind.

BS. 10. 3.
Die Nachfrage nach einer Zeitung in einem kleinen Ort kann 0, 1, 2 oder 3 sein. Ein Zeitungskiosk kauft ein Exemplar dieser Zeitung für 0.10 € und verkauft es für 0.25 €. Damit steht folgende Entscheidungstabelle (Auszahlungsmatrix):

		z_1	z_2	z_3	z_4
		0	1	2	3
a_1	0	0	0	0	0
a_2	1	-10	15	15	15
a_3	2	-20	5	30	30
a_4	3	-30	-5	20	45

Die Frage ist: Wie viel Exemplare soll der Zeitungskiosk entsprechend der jeweiligen Situation kaufen?

B. 10. 8. **(*Entscheidungsregeln bei Ungewissheit*)**
Es gibt u.a. folgende *Regeln*:

1. Laplace-Regel
2. Maximin-Regel

3. Minimax-Regel
4. Maximax-Regel
5. Hurwicz-Regel
6. Savage-Niehans-Regel
7. Krelle-Regel

<u>B. 10. 9.</u> (*Laplace-Regel*)
Wähle die Alternative a_k, so dass

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} .$$

gilt.

<u>BS 10. 3.</u> (*Fortsetzung*)

		z_1 0	z_2 1	z_3 2	z_4 3	$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$
a_1	0	0	0	0	0	0
a_2	1	-10	15	15	15	8.75
a_3	2	-20	5	30	30	**11.25**
a_4	3	-30	-5	20	45	7.50

$$\max(0,\ 8.75,\ 11.25,\ 7.50) = 11.25.$$

Damit wird die Alternative a_3 gewählt.

<u>B. 10. 10.</u> (*Maximin-Regel/Wald*)
Wähle die Alternative a_k, so dass

$$Z_k = \max_{i=1,2,\ldots,m} Z_i := \max_i \min_j x_{ij}$$

Diese Regel ist sehr pessimistisch. Hier wird das jeweils ungünstigste Ereignis betrachtet, welches bei Wahl einer bestimmten Alternative in den verschiedenen Zuständen eintreten kann. Die Alternativen werden nur anhand dieses jeweils schlechtesten Ergebnisses verglichen; alle anderen Ergebnisse einer Alternative werden nicht berücksichtigt.

Z_i nennt man das *Sicherheitsniveau* von a_i und bedeutet, dass a_i einen Minimumbetrag von mindestens Z_i für den Entscheidungsträger garantiert.

<u>BS. 10. 3.</u> (*Fortsetzung*)

		z_1 0	z_2 1	z_3 2	z_4 3	$\min\limits_j x_{ij}$
a_1	0	0	0	0	0	**0**
a_2	1	-10	15	15	15	-10
a_3	2	-20	5	30	30	-20
a_4	3	-30	-5	20	45	-30

$$\max(0,\ -10,\ -20,\ -30) = 0\,.$$

Damit wird die Alternative a_1 gewählt.

<u>B. 10. 11.</u> (*Minimax-Regel*)
Wähle die Alternative a_k , so dass

$$w_{kj} = \min_i \max_j w_{ij}\,,$$

mit

$$w_{ij} := \max_{i,j} x_{ij} - x_{ij}\,.$$

<u>BS. 10. 3.</u> (*Fortsetzung*)

w_{ij}		z_1 0	z_2 1	z_3 2	z_4 3	$\max\limits_j w_{ij}$
a_1	0	45	45	45	45	**45**
a_2	1	55	30	30	30	55
a_3	2	65	40	15	15	65
a_4	3	75	50	25	0	75

$$\min\left(45,\ 55,\ 60,\ 75\right) = 45\,.$$

Damit wird die Alternative a_1 gewählt.

<u>B. 10. 12.</u>
Die Maximin- und Minimax-Regeln führen immer zum gleichen Ergebnis.

<u>B. 10. 13.</u> (*Maximax-Regel*)
Wähle die Alternative a_k , so dass

$$x_{kj} = \max_i \max_j x_{ij}\,.$$

Die Maximax-Regel ist eine sehr optimistische Entscheidungsregel. Hierbei wird jede Alternative nur anhand des Ergebnisses, das beim jeweils für diese Alternative *günstigsten Zustand* eintreten kann, beurteilt.

BS. 10. 3. (***Fortsetzung***)

		z_1 0	z_2 1	z_3 2	z_4 3	$\max\limits_j x_{ij}$
a_1	0	0	0	0	0	0
a_2	1	-10	15	15	15	15
a_3	2	-20	5	30	30	30
a_4	3	-30	-5	20	45	**45**

$$\max(0,\ 15,\ 30,\ 45) = 45\,.$$

Damit wird die Alternative a_4 gewählt.

B. 10. 14. (***Savage-Niehans-Regel***)
Wähle die Alternative a_k, so dass

$$x_{kj} = \min_i \max_j r_{ij}\,,$$

mit

$$r_{ij} = \max_i x_{ij} - x_{ij}\,.$$

BS. 10. 3. (***Fortsetzung***)

r_{ij}		z_1 0	z_2 1	z_3 2	z_4 3	$\max\limits_j r_{ij}$
a_1	0	0	15	30	45	45
a_2	1	10	0	15	30	30
a_3	2	20	10	0	15	**20**
a_4	3	30	20	10	0	30

$$\min(45,\ 30,\ 20,\ 30) = 20\,.$$

Damit wird die Alternative a_3 gewählt.

B. 10. 15.
Die Savage-Niehans-Regel wird auch als *Regel des kleinsten Bedauerns* bezeichnet. Die Matrix $R := (r_{ij}),\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n,$ heißt dann *Matrix des Bedauerns*.

Nach dieser Regel soll der Entscheidungsträger diejenige Alternative wählen, bei der der maximale Opportunitätsverlust (Bedauern) möglichst klein ist.

B. 10. 16. **(*Pessimismus-Optimismus-Regel/Hurwicz*)**
Wähle die Alternative a_k , so dass

$$x_{kj} = \max_i \left\{ \alpha \cdot \max_j x_{ij} + (1-\alpha) \min_j x_{ij} \right\},$$
$$0 \le \alpha \le 1 .$$

Dabei sind:

α: Optimismusfaktor
$1-\alpha$: Pessimismusfaktor.

BS. 10. 3. **(*Fortsetzung*)**
Sei $\alpha := 0.7$

		z_1 0	z_2 1	z_3 2	z_4 3	$\alpha \cdot \max_j x_{ij} + (1-\alpha) \min_j x_{ij}$
a_1	0	0	0	0	0	$0.3 \cdot 0 + 0.7 \cdot 0 = 0$
a_2	1	-10	15	15	15	$0.3 \cdot (-10) + 0.7 \cdot 15 = 7.5$
a_3	2	-20	5	30	30	$0.3 \cdot (-20) + 0.7 \cdot 30 = 15$
a_4	3	-30	-5	20	45	$0.3 \cdot (-30) + 0.7 \cdot 45 = \mathbf{22.5}$

$$\max_i (0;\ 7.5;\ 15;\ 22.5\ ) = 22.5 .$$

Damit wird die Alternative a_4 gewählt.

B. 10. 17.
Die Hurwicz-Regel ist eine Kombination von Minimax- und Maximax-Regel und erlaubt Kompromisse zwischen pessimistischen und optimistischen Entscheidungsregeln. Der Entscheidungsträger kann seine *subjektive* Einstellung durch den Optimismusfaktor α zum Ausdruck bringen.

B. 10. 18. (***Entscheidungsregeln und ihre Risikoeinstellung***)

Entscheidungsregel	**Risikoeinstellung**
Bayes	Risikoneutral
Maximin	Risikoscheu
Minimax	Risikoscheu
Maximax	Risikofreudig
Savage-Niehans	Abhängig vom Optimismusfaktor α
Hurwicz	Äußerst risikoscheu

B. 10. 19. (***Entscheidung unter Risiko***)
Von einer Entscheidungssituation unter Risiko wird gesprochen, wenn der Entscheidungsträger die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Zustände kennt. Unter anderen gibt es hier folgende Regeln:

1. Die μ-Regel/Bayes
2. Die "Bernoulli"-Regel (bzw. das „Bernoulli"-Prinzip)
3. Die $\mu - \sigma$-Regel

B. 10. 20. (***μ-Regel/Bayes***)
Wähle die Alternative a_k, so dass

$$E_k = \max_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot p(z_j).$$

Hier sind:

$p(z_j)$: die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von z_j,

E_k: der Erwartungswert von a_k.

BS. 10. 3. (***Fortsetzung***)

		z_1	z_2	z_3	z_4	
		$p(s_1)=0.10$	$p(s_2)=0.35$	$p(s_3)=0.40$	$p(s_4)=0.15$	
		0	1	2	3	E_i
a_1	0	0	0	0	0	0.00
a_2	1	-10	15	15	15	12.50
a_3	2	-20	5	30	30	**16.25**
a_4	3	-30	-5	20	45	10.00

$$\max(0.00,\ 12.50,\ 16.25,\ 10.00) = 16.25..$$

Damit wird die Alternative a_3 gewählt.

B. 10. 21. (***Die Bernoulli-Regel***)
Wähle eine Alternative a_k , so dass

$$E_k = \max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\left(x_{ij}\right) \cdot p(z_j) ,$$

gilt.

Dabei ist

$u_{ij}\left(x_{ij}\right),\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$: die *Nutzenfunktion* (bzw. *Risiko-Nutzen-Funktion*) von x_{ij} .

B. 10. 22. (***Risikoeinstellung***)
Die Nutzenfunktion gibt die Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers wieder:

$$u''(x)\begin{cases} < 0 & \text{Risikoscheu} \\ = 0 & \text{Risikoneutral} \\ > 0 & \text{Risikofreudig} \end{cases}$$

BS. 10. 3. (***Fortsetzung***)
Sei

$$u_{ij} = -0.02x_{ij}^2 + 3x_{ij},\quad i, j = 1,2,3,4 :$$

u_{ij}		z_1	z_2	z_3	z_4	
		$p\left(z_1\right) = 0.10$	$p\left(z_2\right) = 0.35$	$p\left(z_3\right) = 0.40$	$p\left(z_4\right) = 0.15$	
		0	1	2	3	E_i
a_1	0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.000
a_2	1	-32.0	40.5	40.5	40.5	33.250
a_3	2	-68.0	14.5	72.0	72.0	**37.875**
a_4	3	-108.0	-15.5	52.0	94.5	18.750

$$\max(0.000,\ 32.250,\ 37.875,\ 18.750) = 37.875 .$$

Damit wird die Alternative a_3 gewählt.
In diesem Falle ist wegen

$$u_{ij}^{'} = -0.04x_{ij} + 3,\quad u_{ij}^{''} = -0.04 < 0,\ i, j = 1,2,3,4$$

Der Entscheidungsträger risikoscheu.

B. 10. 23. (***Die*** $\left(\mu - \sigma\right)$ ***– Regel***)

Wähle eine Alternative a_k , so dass

$$\Phi_k = \max_i \Phi(\mu_i, \sigma_i).$$

Hier ist $\Phi(\mu,\sigma)$ eine Präferenzfunktion.

<u>B. 10. 24.</u> (*Risikoeinstellung*)
Präferenzfunktion gibt die Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers wieder:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \begin{cases} < 0 & \text{Risikoscheu} \\ = 0 & \text{Risikoneutrall} \\ > 0 & \text{Risikofreudig} \end{cases}$$

<u>BS. 10. 3.</u> (*Fortsetzung*)
Sei

$$\Phi(\mu,\sigma) = 5\mu - 0.5\sigma.$$

$$\mu_1 = 0.00, \quad \mu_2 = 12.50, \quad \mu_3 = 16.25, \quad \mu_4 = 10.00.$$

$$\sigma_1 = 0.00, \quad \sigma_2 = 7.50, \quad \sigma_3 = 16.7238602, \quad \sigma_4 = 21.50581317.$$

		z_1	z_2	z_3	z_4			
		$p(z_1)=0.10$	$p(z_2)=0.35$	$p(z_3)=0.40$	$p(z_4)=0.15$			
		0	1	2	3	μ_i	σ_i	Φ_i
a_1	0	0	0	0	0	0.00	0.00	0.00
a_2	1	-10	15	15	15	12.50	7.50	58.75
a_3	2	-20	5	30	30	16.25	16.72	**72.89**
a_4	3	-30	-5	20	45	10.00	21.51	39.25

$$\max(0.00,\ 78.75.25,\ 72.89,\ 39.25) = 72.89.$$

Damit wird die Alternative a_3 gewählt.

<u>D. 10. 25</u> (*Entscheidungsbaum*)
Der *Entscheidungsbaum* ist eine Methode zur Darstellung sequentieller Entscheidungen.
Sie besteht aus folgenden Teilen:

2.6.2 Entscheidungsbaum

- Ein Entscheidungsbaum besteht aus folgenden Symbolen:
  1. Alternativenmengen werden durch Vierecke (sog. **Entscheidungsknoten**),
  2. Ereignismengen durch Kreise (sog. **Ereignisknoten**) und
  3. Konsequenzen durch Dreiecke dargestellt.
- Von jedem Knoten gehen Linien aus, die zu weiteren Entscheidungs- oder Ereignisknoten führen können.
- Entscheidungsbäume werden zur Darstellung **sequentieller Entscheidungen** (d. h. Strategien) verwendet.

(Letzte Aktualisierung: 06 .09.2014)