Kapitel 9

Grundlagen der Input-Output-Analyse

<u>B. 9. 1.</u> (*Input-Output-Tableau*)
Das sog. “klassische Leontief-Modell basiert auf der Input-Output-Tabelle:

$i \setminus j$	Produktionssektoren					Sektoren der Endnachfrage					Gesamtoutput
	1	…	j	...	n	1	...	k	…	m	
1	x_{11}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}	y_{11}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{1m}	x_1
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$		.	$\cdots$	.	$\cdots$	.	.
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$		.	$\cdots$	.	$\cdots$	.	.
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$		.	$\cdots$	.	$\cdots$	.	.
i	x_{i1}		x_{ij}	$\cdots$	x_{in}	y_{i1}	$\cdots$	y_{ik}	$\cdots$	y_{im}	x_i .
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$		.	$\cdots$	.	$\cdots$	.	.
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$		.	$\cdots$	.	$\cdots$	.	.
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$		.	$\cdots$	.	$\cdots$	.	.
n	x_{n1}	$\cdots$	x_{nj}	$\cdots$	x_{nn}	y_{n1}	$\cdots$	y_{nk}	$\cdots$	y_{nm}	x_n
1	z_{11}	$\cdots$	z_{1j}	$\cdots$	z_{1n}						
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$							
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$							
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$							
l	z_{l1}	$\cdots$	z_{lj}	$\cdots$	z_{ln}						
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$							
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$							
.	.	$\cdots$	.	$\cdots$							
p	z_{p1}	$\cdots$	z_{pj}	$\cdots$	z_{pn}						
Gesamt-input	x_1	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_n						

Symbolik:

$n \ (i, j = 1, 2, ..., n)$: Anzahl der Produktionssektoren
$m \ (k = 1, 2, ..., m)$: Anzahl der Sektoren der Endnachfrage
$p \ (l = 1, 2, ..., p)$: Anzahl der Sektoren der Primärinputs (exogene Sektoren)
x_{ij}: Lieferung des Sektors i an Sektor j
y_{ik}: Endnachfrage des Produktionssektors i der Art k (I.. Primärer Haushalt (Konsumtion, Investition); II. Staat (Konsumtion, Investition); III. Ausland (Export))
z_{lj}: Primärinput der Art l, eingesetzt im Sektor j (I. Primärer Haushalt (Arbeit, Kapital); Staat; III. Ausland (Import))
x_i: Bruttoproduktion (Gesamtoutput) des Sektors i

BS. 9. 1.

		Sektoren				
		1	2	3	Endnachfrage	Bruttoproduktion
Sektoren	1	200	300	150	350	1000
	2	100	420	480	500	1500
	3	50	200	900	550	1700
Primärinputs	1	200	400	100		
	2	450	180	70		
		1000	1500	1700		

B. 9. 2. (***Einige Grundformeln***)

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + y_i, \quad i = 1,2,\dots,n$$

$$y_i := \sum_{k=1}^{m} y_k : \qquad \text{Endnachfrage des Sektors } i$$

$$x_j = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + z_j, \quad j = 1,2,\dots,n\,.$$

$$z_j := \sum_{l=1}^{p} z_{lj}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} z_j\,.$$

B. 9. 3. (***Voraussetzungen des Modells***)
Das *klassische Leontief-Modell* basiert auf folgenden *Voraussetzungen*:

1. Jeder Sektor produziert höchstens ein homogenes Gut.
2. Die Endnachfrage bildet einen exogenen Sektor.
3. Ein gegebener Output kann nur durch eine eindeutige Kombination von Produktionsfaktoren hergestellt werden.
4. Der Input x_{ij} ist proportional dem Output x_j.

D. 9. 1. (***Direkte sekundäre Inputkoeffizienten***)
Als *Matrix der direkten, sekundären Input-Output-Koeffizienten* bezeichnet man

$$A := \left(a_{ij}\right),\ i, j = 1, 2, \ldots, n$$

$$a_{ij} := \frac{x_{ij}}{x_j},\quad i, j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

BS. 9. 1. (***Fortsetzung***)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{200}{1000} & \frac{300}{1500} & \frac{150}{1700} \\ \frac{100}{1000} & \frac{420}{1500} & \frac{480}{1700} \\ \frac{50}{1000} & \frac{200}{1500} & \frac{900}{1700} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.2000 & 0.2000 & 0.0882 \\ 0.1000 & 0.2800 & 0.2824 \\ 0.0500 & 0.1333 & 0.5294 \end{pmatrix}.$$

D. 9. 2. (***Das klassische Leontief-Modell***)
Das *klassische Leontief-Modell* lautet

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i,\quad i = 1, 2, \ldots n\,,$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$x = Ax + y\,.$$

Hier sind:

$$x := (x_j) \in R_+^n\,,$$

$$A := (a_{ij}),\ i, j = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$y := (y_i) \in R_+^n$$

B. 9. 3.
Unter der Voraussetzung, dass die Koeffizienten der Matrix A gegeben sind, lassen sich zwei Fälle unterscheiden

1. Bekannt ist der Vektor x, gesucht ist der Vektor y. Dann gilt:

$$y = (E - A)x\,.$$

2. Bekannt ist der Vektor y, gesucht ist der Vektor x. Dann gilt:

$$x = (E - A)^{-1} y$$

3. Teile des Vektors x und Teile des Vektors y sind bekannt, die unbekannten Komponenten der beiden Vektoren werden gesucht.
Dies geschieht über die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

D. 9. 3. (*Leontief- Matrix*)
Die Matrix $(E-A)$ heißt *Leontief-Matrix* bzw. *Technologie-Matrix*.

BS. 9. 1. (*Fortsetzung*)

$$E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0.2000&0.2000&0.0882\\0.1000&0.2800&0.2824\\0.0500&0.1333&0.5294\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.8000&-0.2000&-0.0882\\-0.1000&0.7200&-0.2824\\-0.0500&-0.1333&0.4706\end{pmatrix}$$

D. 9. 4. (*Matrix der komplexen, sekundären Input-Koeffizienten*)
The Matrix

$$(E-A)^{-1}=:B=(b_{ij}),\ i,j=1,2,\dots,n,$$

heißt *Leontief-Inverse*. Ihre Elemente $b_{ij},\ i,j=1,2,\dots,n,$ sind sog. *komplexe, sekundäre Input-Output-Koeffizienten.*

BS. 9. 1. (*Fortsetzung*)

$$B:=(E-A)^{-1}\approx\begin{pmatrix}1.3426&0.4719&0.5348\\0.2727&1.6583&1.0462\\0.2199&0.5199&2.4781\end{pmatrix}.$$

Die 2. Spalte dieser Matrix gibt an, wie viel die einzelnen Sektoren *zusätzlich* produzieren müssen, wenn nur die Endnachfrage des Sektors 2 um eine Einheit erhöht wird.
Ähnlich werden die anderen Spalten interpretiert werden.

D. 9. 5. (*Matrix der indirekten, sekundären Input -Koeffizienten*)
Die Matrix $(E-A)^{-1}-(E+A)$ heißt *Matrix der indirekten, sekundären Input-Koeffizienten.*

BS. 9. 1. (*Fortsetzung*)

$$B-(E+A)=\begin{pmatrix}1.3426&0.4719&0.5348\\0.2727&1.6583&1.0462\\0.2199&0.5199&2.4781\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1.2000&0.2000&0.0882\\0.1000&1.2800&0.2824\\0.0500&0.1333&1.5294\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0.1426&0.2719&0.4466\\0.1727&0.3783&0.7638\\0.1699&0.3866&0.9487\end{pmatrix}.$$

BS. 9. 1. (*Fortsetzung*)

Berechnen Sie die Endnachfrage der drei Sektoren für den Bruttoproduktionsvektor

$$x = \begin{pmatrix} 1200 & 1800 & 1600 \end{pmatrix}^T$$

Lösung:

$$y = (E - A)x = \begin{pmatrix} 0.8000 & -0.2000 & -0.0882 \\ -0.1000 & 0.72000 & -0.2824 \\ -0.0500 & -0.1333 & 0.4706 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1200 \\ 1800 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 458.88 \\ 724.16 \\ 453.02 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Bruttoproduktion der drei Sektoren für den Endnachfragevektor

$$y = \begin{pmatrix} 458.88 & 724.16 & 453.02 \end{pmatrix}^T$$

Lösung:

$$x = (E - A)^{-1} y = \begin{pmatrix} 1.3426 & 0.4719 & 0.5348 \\ 0.2727 & 1.6583 & 1.0462 \\ 0.2199 & 0.5199 & 2.4781 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 458.88 \\ 724.16 \\ 453.02 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1200.10 \\ 1799.96 \\ 1600.03 \end{pmatrix}$$

<u>BS. 9. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Berechnen Sie die Bruttoproduktion des Sektors 2 und die Endnachfragen der Sektoren 1 und 3, wenn die Endnachfrage des 2. Sektors 600 ME und die Bruttoproduktion des 1. Sektors bzw. des 3. Sektors 1200 ME bzw. 2000 ME beträgt.

Lösung:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ 600 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8000 & -0.2000 & -0.0882 \\ -0.1000 & 0.72000 & -0.2824 \\ -0.0500 & -0.1333 & 0.4706 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1200 \\ x_2 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

$$600 = -0.1000 \cdot 1200 + 0.7200 x_2 - 0.2824 \cdot 2000 \quad \Rightarrow \quad x_2 \approx 1784.44$$

$$y_1 = 0.8000 \cdot 1200 - 0.2000 \cdot 1784.44 - 0.0882 \cdot 2000 \approx 426.71$$

$$y_3 = -0.0500 \cdot 1200 - 0.1333 \cdot 1784.44 + 0.4706 \cdot 2000 \approx 643.33$$

<u>D. 9. 6.</u> (*Direkte primäre Input-Koeffizienten*)

Die Matrix

$$\tilde{A} := \left(\tilde{a}_{ij}\right), \; i, j = 1,2,\ldots,n$$

$$\tilde{a}_{ij} := \frac{z_{lj}}{x_j}, \quad l = 1,2,,\ldots p; \; j = 1,2,\ldots,n$$

heißt *Matrix der direkten, primären Input-Output-Koeffizienten.*

<u>BS. 9. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Berechnen Sie die Matrix der direkten primären Inputkoeffizienten.

Lösung:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{200}{1000} & \frac{400}{1500} & \frac{100}{1700} \\ \frac{450}{1000} & \frac{180}{1500} & \frac{70}{1700} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.2000 & 0.2667 & 0.0588 \\ 0.4500 & 0.1200 & 0.0412 \end{pmatrix}.$$

<u>D. 9. 7.</u> (*Komplexe primäre Input-Koeffizienten*)
Die Matrix

$$\tilde{B} = \tilde{A} \cdot (I - A)^{-1}$$

heißt *Matrix der komplexen primären Input-Koeffizienten.*

(Die $l-te$ Spalte von $\tilde{B}$ gibt an, wie viele Einheiten der Primärinputs zusätzlich bereitgestellt werden müssen, wenn nur die Endnachfrage des $l-ten$ Sektors um eine Einheit erhöht wird.)

<u>BS. 9. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Berechnen Sie die Matrix der komplexen primären Inputkoeffizienten.

Lösung:

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0.2000 & 0.2667 & 0.0588 \\ 0.4500 & 0.1200 & 0.0412 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.3426 & 0.4719 & 0.5348 \\ 0.2727 & 1.6583 & 1.0462 \\ 0.2199 & 0.5199 & 2.4781 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3541 & 0.5672 & 0.6101 \\ 0.6360 & 0.4328 & 0.4683 \end{pmatrix}.$$

<u>B. 9. 4</u>
Sei

$$z := (z_l) \in R_+^p$$

der Vektor der Primärinputs. Dann gilt:

$$z = \tilde{B} \cdot y.$$

<u>BS. 9. 1.</u> (*Fortsetzung*)

Berechnen Sieden Bedarf an Primärinputs für eine Endnachfrage von

$$y = \begin{pmatrix} 458.88 & 724.16 & 453.02 \end{pmatrix}^T$$

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 0.3541 & 0.5672 & 0.6101 \\ 0.6360 & 0.4328 & 0.4683 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 458.88 \\ 724.16 \\ 453.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 849.62 \\ 817.41 \end{pmatrix}$$

(Letzte Aktualisierung: 29 .09.2013)