Kapitel 8

Modelle der ganzzahligen Optimierung

B. 8. 1.
Bei einer Anzahl von Optimierungsproblemen müssen ei9nige oder alle Entscheidungsvariablen ganzzahlige Werte annehmen. Die mit dieser Zusatzforderung verbundenen Optimierungsmodelle werden *Modelle der ganzzahligen Optimierung* oder auch *kombinatorische Modelle* genannt.

BS. 8. 1.
Ein Betrieb stellt ein Produktionssortiment her, das aus den *unteilbaren Produkten* $P_1, P_2, ..., P_n$ besteht. Die dem Betrieb zur Verfügung stehenden Arbeitsmittel und Arbeitsgegenstände sowie die vorhandenen Arbeitskräfte sollen dabei so eingesetzt werden, dass sich eine gewinnmaximale Kombination ergibt.

Das Modell:
Sei

g_j : Gewinn pro Mengeneinheit von Produkt P_j, $j = 1,2,...,n$

x_j : herzustellende Menge von P_j, $j = 1,2,...,n$

a_{ij} : Verbrauch an Einsatzgröße $i = 1,2,...,m$ pro Mengeneinheit von P_j, $j = 1,2,...,n$

b_i : verfügbare Menge der Einsatzgröße $i = 1,2,...,m$

$$z = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j \to \max$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = 1,2,...,m$$

$$x_j \ge 0, \text{ ganzzahlig,} \qquad j = 1,2,...,n.$$

In der Standardform:

$$z = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j \to \max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, \text{ ganzzahlig}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = n+1, \ldots, n+m.$$

<u>BS. 8. 2.</u>
Betrachtet sei nun das BS.8. 1. mit unteilbaren Einsatzgrößen.

<u>Das Modell</u>:
Sei

y_i : Anzahl der nicht genutzten Einsatzgrößen,

k_i : Kosten für eine nicht genutzte Einsatzgröße i in der betrachteten Periode

$$z = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j - \sum_{i=1}^{m} k_i y_i \rightarrow \max$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_i \geq 0, \text{ ganzzahlig} \quad i = 1, 2, \ldots m.$$

Wenn die b_i als zur Verfügung stehende Mengen der Einsatzgrößen ganzzahlig sind und wir für die nicht genutzten Einsatzgrößen y_i die Ganzzahligkeit fordern, ist dann auch $b_i - y_i$, die Anzahl der genutzten Einsatzgrößen ganzzahlig.

<u>BS. 8. 3.</u>
Wir können das letzte Modell auch etwas anders formulieren: Wir gehen dann davon aus, dass die Kosten in zwei Gruppen aufgeteilt werden können: fixe

Kosten und proportionale Kosten. Die fixen Kosten erscheinen in der Zielfunktion nur als Konstanten und beeinflussen die Optimierung nicht. Die proportionalen Kosten fallen in diesem Fall nur für die genutzten Anlagen an. Es ist dann günstig, die Gewinnmaximierung in der Form Erlös minus Kosten vorzunehmen.

Das Modell:
Sei

p_j : Erlös pro Mengeneinheit des Produktes P_j, vermindert um sämtliche proportionalen pro Mengeneinheit des Produktes P_j,

c_j : Kosten der Nutzung der Anlage i ausschließlich der fixen Kosten,

K : Summe der fixen Kosten für die betrachtete Periode.

$$z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{i=1}^{m} c_i y_i - K \to \max$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i, \qquad i = 1,2,...,m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1,2,...,n,$$

$$y_i \geq 0, \text{ ganzzahlig} \quad i = 1,2,...m.$$

BS. 8. 4.
Hier ergibt sich eine Kombination der beiden Probleme, bei der sowohl die Produktionsmengen als auch die genutzten Einsatzgrößen ganzzahlig sein müssen. Wenn wir die letzte Form der Zielfunktion wählen, ergib sich

Das Modell:

$$z = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j - \sum_{i=1}^{m} c_i y_i - K \to \max$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \le b_i, \qquad i = 1,2,...,m,$$

$$x_j \ge 0, \text{ ganzzahlig} \quad j = 1,2,...,n,$$

$$y_i \ge 0, \text{ ganzzahlig} \quad i = 1,2,...m.$$

B. 8. 2. (Ein allgemeines Ernennungsproblem)

Gegeben seien n Gegenstände, die so auf n Plätze zu verteilen sind, dass eine lineare Funktion optimiert wird.
Weiterhin sei eine Matrix

$$A := (a_{ij}), \quad i, j = 1,2,...,n$$

bekannt, deren Elemente $a_{i,j}, \quad i, j = 1,2,...,n$ Kennziffern bezeichnen, die einem Nutzen oder Kosten entsprechen, wenn sich Gegenstand i auf Platz j befindet.

Sei ferner

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{wenn Gegenstand } i \text{ nicht auf Platz } j \text{ ist} \\ 1, & \text{wenn Gegenstand } i \text{ auf Platz } j \text{ ist} \end{cases}$$

Das Modell:

$$z = \sum_{i}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{ij} \to \max \ (\min)$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1, \qquad i = 1,2,...,n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1, \qquad j = 1,2,...,n,$$

BS. 8. 5.
Ein Betrieb hat n Erdbewegungsmaschinen. Sie sollen auf n Baustellen eingesetzt werden, wobei auf jeder Baustelle eine Maschine erforderlich ist. Die Erdbewegungsmaschinen sind von unterschiedlichem Typ. Sie haben verschiedene technische Parameter. Daraus und aus der unterschiedlichen Art der Aufgaben an den verschiedenen Baustellen ergibt sich die Leistungskennziffer.
Es sei

a_{ij} : Leistung der Maschine i beim Einsatz auf der Baustelle j pro Schicht.

Der Einsatz soll so erfolgen, dass die Gesamtlistung der Erdbewegungsmaschinen groß ist.

Das Modell:

$$z = \sum_{i}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{ij} \rightarrow \max$$

unter den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, ..., n,$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{wenn Maschine } i \text{ nicht auf Baustelle } j \text{ eingesetzt ist} \\ 1, & \text{wenn Maschine } i \text{ auf Baustelle } j \text{ eingesetzt ist} \end{cases}$$

Die optimale Lösung ergibt das Optimum für eine Zeiteinheit oder eine Schicht.

<u>B. 8. 3.</u> (Das Rücksackproblem)
Auf eine Bergtour wird ein Rucksack mitgenommen, in dem verschiedene Gegenstände unterzubringen sind. Dabei sind mehr Gegenstände zur Mitnahme vorgesehen., als wir im Rucksack unterbringen können. Die Auswahl ist durch den zur Verfügung stehenden Raum (oder Gewicht) begrenzt. Bekannt ist eine Maßzahl für den „Wert“ der einzelnen Gegenstände in Bezug auf die zu unternehmende Bergtour. Der Inhalt des Rücksackes soll so zusammengestellt werden, dass dieser „Wert“ maximiert wird.

Wir betrachten n Gegenstände. Weiterhin sind gegeben:

r_i: Raumbedarf für Gegenstand i,
w_i: „Wert“ des Gegenstandes i,
R: zur Verfügung stehende Raum.

Für die Variable x_i gilt

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{wenn Gegenstand } i \text{ zurückgelassen wird,} \\ 1, & \text{wenn Gegenstand } i \text{ mtgenommen wird.} \end{cases}$$

Das Problem lautet

$$z = \sum_{i}^{n} w_i x_i \rightarrow Max$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \leq R$$

und

$$x_i = 0,1, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

BS. 8. 6.
Sei nun $n = 4$ und $R = 35$. Raumbedarf und „Wert“ der vier Gegenstände seien durch folgende Tabelle gegeben:

Gegenstand	r_i	w_i
G_1	15	20
G_2	18	25
G_3	23	30
G_4	17	21

Sei

$x_i := 0,, \quad i = 1,2,3,4$: Zurücklassen des Gegenstandes i

$x_i := 1,, \quad i = 1,2,3,4$: Mitnahme des Gegenstandes i

$$Z = 20x_1 + 25x_2 + 30x_3 + 21x_4 \to Max!$$

$$15x_1 + 18x_2 + 23x_3 + 17x_4 \leq 35,$$

$$x_i = 0,1, \qquad i = 1,2,3,4.$$

Lösung:
Für die Entscheidung über x_1 gibt es die beiden Möglichkeiten $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$.

$x_1 = 0$:
Dann ergibt sich:

$$Z = 25x_2 + 30x_3 + 21x_4 \to Max!$$

$$18x_2 + 23x_3 + 17x_4 \leq 35,$$

$$x_i = 0,1, \qquad i = 2,3,4.$$

$x_1 = 1$:
Dann ergibt sich:

$$Z = 20 + 25x_2 + 30x_3 + 21x_4 \to Max!$$

$$15 + 18x_2 + 23x_3 + 17x_4 \leq 35,$$

$$x_i = 0,1, \qquad i = 2,3,4.$$

Die beiden hier angegebenen Aufgaben entsprechen den beiden Knoten im Lösungsraum, die unter x_1 (siehe die Abbildung). Es muss nun ein Kriterium gefunden werden, welcher Ast zu wählen ist. Dieses Kriterium nennt man die Boundfunktion. Als Kriterium empfiehlt sich in diesem Falle der gesamte Raumbedarf der Gegenstände, die noch die Chance haben, mitgenommen zu werden. Der höchste Wert dieser Funktion ist $\sum_{i=1}^{r} r_i = 73$.

Für $x_1 = 0$ gilt als Schranke $73 - 15 = 58$, denn x_1 wird nicht mitgenommen. Die Zielfunktion hat den Wert 0, und es sind noch alle 35 Raumeinheiten verfügbar.

Für $x_1 = 1$ ist die Schranke 73, die Zielfunktion 20, und es sind noch 20 Raumeinheiten verfügbar.

An den untersuchten Knoten stehen diese drei Zahlen (Schranke; Zielfunktion; noch verfügbare Raumeinheiten) in der angegebenen Reihenfolge.

Wir setzen das Verfahren, ausgehend von dem Knoten mit der größeren Schranke, der in Abbildung mit 2 bezeichnet ist, fort und erhalten dann 3 und 4. Für den nächsten Schritt stehen nun die Knoten 1, 3 und 4 zur Wahl. Den größten Bound hat 4 mit 73. Wir erhalten jetzt 5 und 6, wobei in 6 zum ersten Mal der Fall auftritt, dass die Lösung nicht mehr zulässig ist. Damit fallen die von 6 ausgehenden Zweige weg.

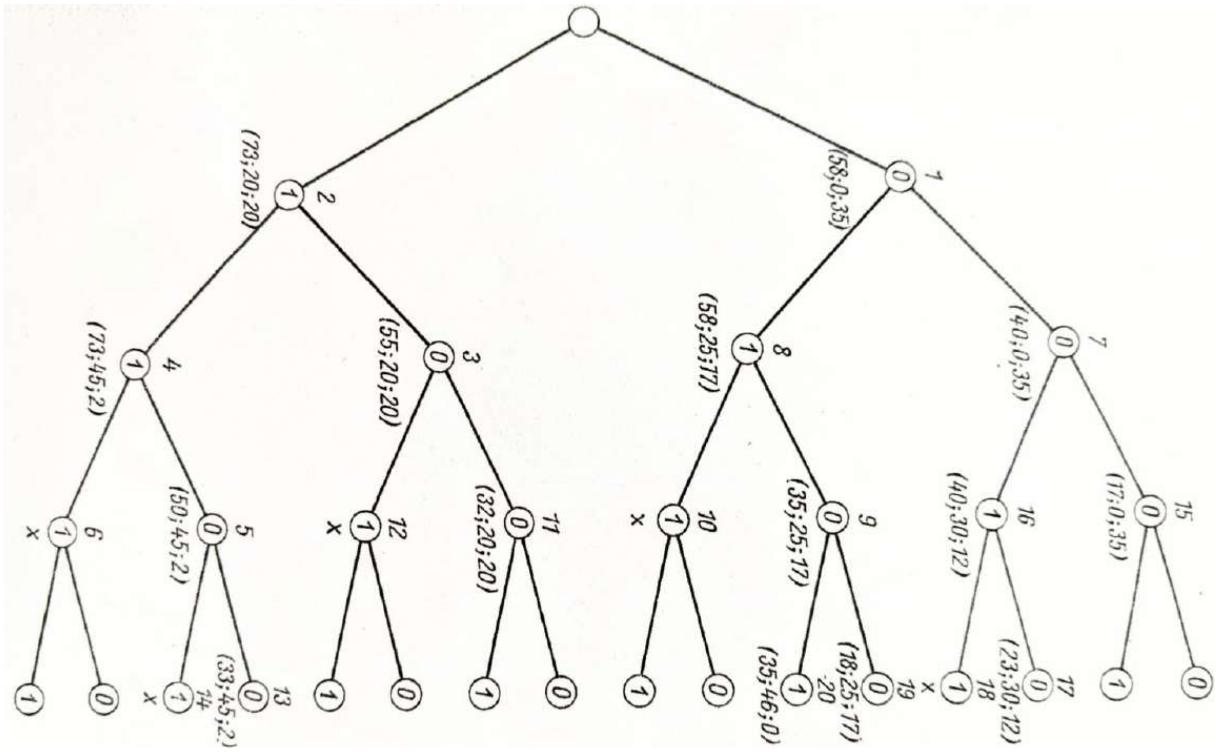
Im folgenden Schritt stehen die Knoten 1, 3 und 5 zur Auswahl. Wir gehen von 1 aus weiter, da dort die größte Schranke vorhanden ist.

Schließlich erreichen wir in 13 und 14 zum ersten Mal Knospen. Um uns davon zu überzeugen, ob wir die gesuchte Lösung gefunden haben, müssen wir die Untersuchungen bei allen Knoten fortsetzen, die einen größeren Bound als die Lösung im Knoten 13 haben. Die Untersuchung ist solange weiterzuführen, bis man nur noch Knoten hat, die einen kleineren Bound haben, oder auf nicht zulässige Lösungen stößt.

Die nach 20 Schritten gefundene Lösung ist:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$$

Die Zielfunktion hat dann den Wert 46, und der vorhandene Raum ist vollständig ausgenutzt.


(73;20;20)
(58;0;35)
(73;45;2)
(55;20;20)
(58;25;17)
(40;0;35)
(50;45;2)
(32;20;20)
(35;25;17)
(40;30;12)
(17;0;35)
(33;45;2)
(18;25;17)
(35;46;0)
(23;30;12)