Kapitel 6

Lineare Optimierung

Das klassische Transportproblem

<u>D. 6. 1.</u> (*Das klassische Transportproblem*)
Unter dem *klassische Transportproblem* versteht man folgende Aufgabe

$$Min\left\{ z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \mid \sum_{j=1}^{n}x_j=a_i,\ \sum_{i=1}^{m}x_i=b_j,\ x_{ij}\geq 0,\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n \right\}.$$

Hier sind:

$m\,(i=1,2,...,m)$:	Anzahl der Versandsorte,
$n\ \ (j=1,2,...,n)$:	Anzahl der Bestimmungsorte,
$c_{ij}\ \ (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$:	Transportkosten/ME für den Transportweg $i\to j$,
$x_{ij}\ \ (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$:	Transportmenge vom $i-ten$ Versandsort zum $j-ten$ zum $j-ten$ Bestimmungsort (*Entscheidungsvariable*),
$0\leq a_i<\infty\ \ (i=1,2,...,m)$:	Kapazität des $i-ten$ Versandortes,
$0\leq b_j<\infty\ \ (j=1,2,...,n)$:	Bedarf des $j-ten$ Bestimmungsortes.

Dabei mögen folgende *Voraussetzungen* gelten:

V1: $\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$ (*Gleichgewichtsbedingung*)
(*V1* wirkt sich in der Weise aus, dass alle Restriktionen Gleichungen sind.)

V2: Es gibt von jedem Versandsort zu jedem Bestimmungsort genau ein Transportweg.
(*V2* sichert, dass die c_{ij} eindeutig gegeben sind.)

V3: Die Kapazität der Transportwege ist unbegrenzt.
(Sonst müssten weitere Einschränkungen für die x_{ij} eingeführt werden.)

V4: Das zu transportierende Gut ist homogen.
(*V4* sichert, dass keine besonderen Lieferwünsche in Form von weiteren Restriktionen berücksichtigt werden.)

V5: Die Transportkosten sind für jeden Transportweg proportional den Transportmengen.
(*Linearität*)

B. 6. 1. **(*Das Transporttableau*)**

	1	. . .	j	. . .	n	Kapazität
1	c_{11} x_{11}		c_{1j} x_{1j}		c_{1m} x_{1m}	a_1
. . .						
i	c_{i1} x_{i1}		c_{ij} x_{ij}		c_{im} x_{im}	a_i
. . .						
m	c_{m1} x_{m1}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}	a_m
Bedarf	b_1		b_j		b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

BS. 6. 1.

Die Produzenten $P_i,\ i=1,2,3$ stellen ein homogenes Gut in folgenden Mengeneinheiten her:

$$P_1: \text{ 36 ME},\quad P_2: \text{ 33 ME},\quad P_3: \text{ 31 ME}.$$

Das Produkt ist zu fünf Endverbrauchern $V_j,\ j=1,2,...,5$, mit folgendem Bedarf zu transportieren:

$$V_1: \text{ 20 ME},\quad V_2: \text{ 20 ME},\quad V_3: \text{ 20 ME},\quad V_4: \text{ 20 ME},\quad V_5: \text{ 20 ME}.$$

Die Transportkosten/ME sind in folgender Tabelle angegeben:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
P_1	6	7	3	10	2
P_2	3	9	6	8	1
P_3	4	13	8	7	3

Stellen Sie das entsprechende Modell auf.

Lösung:

$$z = 6x_{11} + 7x_{12} + 3x_{13} + 10x_{14} + 2x_{15} + 3x_{21} + 9x_{22} + 6x_{23} + 8x_{24} + x_{25}$$
$$+4x_{31} + 13x_{32} + 8x_{33} + 7x_{34} + 3x_{35} \to Min!$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 36 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 20$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 33 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 20$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 31 \qquad \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 20$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 20$$
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 20$$
$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4,5.$$

S. 6. 1.
Das klassische Transportproblem hat stets (mindestens) eine zulässige Lösung.

Beweis:
Sei
$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j =: A.$$

Wir zeigen, dass

$$x_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{A}, \quad i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$$

eine zulässige Lösung des klassischen Transportproblems ist:

$$x_{ij} = \frac{a_i \cdot b_j}{A} \geq 0, \quad i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{A} = a_i \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j}{A} = a_i, \quad i = 1,2,...,m$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{A} = b_j \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} a_i}{A} = b_j, \quad j = 1,2,...,n.$$

BS. 6. 1. (*Fortsetzung*)
Geben Sie eine zulässige Lösung des Problems an.

Lösung:

$$x_{11} = \frac{a_1 b_1}{A} = \frac{36 \cdot 20}{100} = 7.2, \qquad x_{12} = \frac{a_1 b_2}{A} = \frac{36 \cdot 20}{100} = 7.2 \text{ usw.}$$

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
B_1	7.2	7.2	7.2	7.2	7.2	36
B_2	6.6	6.6	6.6	6.6	6.6	33
B_3	6.2	6.2	6.2	6.2	6.2	31
b_j	20	20	20	20	20	100

S. 6. 2.
Die Menge der zulässigen Lösungen des klassischen Transportproblems ist stets beschränkt.

Beweis:

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i < \infty \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j < \infty \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad 0 \le x_{ij} < \infty$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

F. 6. 1.
Das klassische Transportproblem besitzt stets (mindestens) eine Optimallösung.

Beweis:
Folgt aus S. 7. 1. und S. 7. 2.

S. 6. 3
In einem klassischen Transportproblem ist mindestens eine Nebenbedingung überflüssig (abhängig von den übrigen $m+n-1$ Restriktionen).

BS. 6. 2. ***(Illustration des Satzes S. 6. 3.)***
Wir illustrieren den Satz S. 6. 3 durch folgende Aufgabe mit $m = 2,\; n = 3$

x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
b_1	b_2	b_3	

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x_{11}+x_{12}+x_{13} = a_1 \\
(2) & x_{21}+x_{22}+x_{23} = a_2 \\
(3) & x_{11} + x_{21} = b_1 \\
(4) & x_{12} \quad x_{22} = b_2 \\
(5) & x_{13} + x_{23} = b_3
\end{array}
$$

Addiert man die Gleichungen (3) – (5) und subtrahiert davon die Gleichung (2), so erhält man die Gleichung (1).

F. 6. 2.
Die Koeffizientenmatrix eines klassischen Transportproblems hat einen Rangabfall von mindestens eins: $r(A) \le m+n-1$.

B. 6. 3. (***Illustration der Folgerung F. 6. 2.***)

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$r(A) \le 2+3-1=4.$

F. 6 . 3
Jede zulässige Basislösung eines klassischen Transportproblems hat höchsten $m+n-1$ positive Komponenten.

B. 6. 4.
Folgender Satz[1] sichert die Existenz einer zulässigen Basislösung eines klassischen Transportproblems.

D. 6. 2. (***Degenerierte zulässige Basislösung***)
Eine zulässige Basislösung eines Transportproblems mit weniger als $m+n-1$ positiven Komponenten heiß *degeneriert*.

S. 6. 4.
Sind bei einem klassischen Transportproblem $a_i \ge 0,\ i=1,2,...,m;\ b_j \ge 0,\ j=1,2,...,n,$ ganzzahlig, dann ist jede zulässige Basislösung dieses Problems ebenfalls ganzzahlig.

B. 6. 5. (***Methoden zur Bestimmung einer zulässigen Basislösung***)
Wir beschränken uns hier auf folgende Methoden:

1. Die Nord-West-Ecken-Regel
2. Das Verfahren von Vogel (Vogelsche Approximationsmethode – VAM)

[1] Satz: Hat ein lineares Optimierungsproblem eine zulässige Lösung, dann hat es auch mindestens eine Basislösung.

<u>B. 6. 6.</u> (*Nord-West-Ecken-Regel*)
Es handelt sich hierbei um eine einfache Methode zur Ermittlung einer Ausgangslösung.
Bei dieser Regel wird die Zuordnung der Transportmengen in der linken oberen Ecke der Tabelle, also im „Nordwesten“ mit der maximal möglichen Menge x_{11} begonnen. Das ist die kleinere Menge aus dem Angebot a_1 und dem Bedarf b_1. Wird dabei das Angebot voll ausgelastet, streichen wir Zeile 1 und springen für die nächste Zuordnung eine Zeile nach unten. Wird dagegen der Bedarf voll befriedigt, streichen wir Spalte 1 und gehen eine Spalte nach rechts. Diese Vorgehensweise wird so lange fortgeführt, bis wir in der Südost-Ecke angelangt sind.

<u>BS. 6. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Bestimmen Sie eine zulässige Basislösung nach der Nord-West-Ecken-Regel an.

Lösung:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i
P_1	6 **20**	7 **16**	3	10	2	36
P_2	3	9 **4**	6 **20**	8 **9**	1	33
P_3	4	13	8	7 **11**	3 **20**	31
b_j	20	20	20	20	20	100

$z_0 = 597$

<u>B. 6. 7.</u>
Die Nord-West-Ecken-Regel hat den Vorteil, dass sie sehr einfach ist. Da sie aber die Transportkosten unberücksichtigt lässt, ist die dadurch gelieferte zulässige Basislösung im Allgemeinen keine gute Lösung.

<u>B. 6. 8.</u> (*Das Verfahren von Vogel, VAM*)

1. Beachte für jede Reihe (Zeile und Spalte) des Transporttableaus die Differenz zwischen den beiden niedrigsten Transportkosten. Sind die minimalen Kosten nicht eindeutig, ist die Differenz gleich Null.

2. Wähle die (bzw. eine) Reihe mit der größten Differenz.

3. Belege in dieser Reihe das Feld mit den niedrigsten Kosten maximal.

4. Reduziere das Tableau um die entfallene Reihe und wiederhole das Verfahren solange bis die Gesamtkapazität (= Gesamtbedarf) vollständig verteilt ist.

<u>B. 6. 9.</u>
Das Verfahren von Vogel liefert in der Regel eine sehr gute zulässige Basislösung:

<u>BS. 6. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Bestimmen Sie eine zulässige Basislösung nach der Approximationsmethode von Vogel.

Lösung:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i	d_i
P_1	6	7	3 **20**	10	2 **16**	36	1,4
P_2	3 **9**	9 **20**	6	8	1 **4**	33	2,5
P_3	4 **11**	13	8	7 **20**	3	31	1,3
b_j	20	20	20	20	20	100	
d_j	1	2,4	3	1	1,2		

$$z_0 = 487$$

<u>S. 6. 5.</u>
Sind $u_i,\ i=1,2,...,m$ und $v_j,\ j=1,2,...,n,$ beliebige reelle Zahlen, dann unterscheiden sich für jede zulässige Lösung die Gesamttransportkosten für das Problem mit den Einheitstransportkosten c_{ij} von denen des Problems mit den Einheitstransportkosten

$$c_{ij}^{'} := c_{ij} - u_i - v_j, \quad i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n,$$

um die Konstante

$$K = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \ ,$$

und beide Probleme besitzen dieselbe Optimallösung.

Beweis:
Sei $x_{ij}^*,\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n,$ eine beliebige zulässige Lösung, gegeben, d.h.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^* = a_i, \quad i=1,2,...,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}^* = b_j, \quad j=1,2,...,n$$

$$x_{ij}^* \geq 0,\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n.$$

Diese Lösung erteilt der Zielfunktion bei den Einheitstransportkosten c_{ij} den Wert

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^*.$$

Bei den Einheitstransportkosten $c_{ij}^{'}$ erhält die Zielfunktion den Wert

$$
\begin{aligned}
z' &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^{'} x_{ij}* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij} - u_i - v_j\right) x_{ij}^{*} \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}^{*} - \sum_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{*})\cdot u_i - \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{*}\right)\cdot v_j \\
&= z - \left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right). \\
z' &= z - K.
\end{aligned}
$$

S. 6. 6.
Ist eine beliebige zulässige Lösung des klassischen Transportproblems gegeben, dann lassen sich stets solche reellen Zahlen $u_i,\ i = 1, 2, ..., m$ und $v_j,\ j = 1, 2, ..., n,$ bestimmen, dass

$u_i + v_j = c_{ij},$ für alle (i, j), für die x_{ij} Basisvariable ist,

gilt.

S. 6. 7.
Gilt bezüglich einer zulässigen Basislösung

$$c_{ij}^{'} = c_{ij} - u_i - v_j \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m;\ j = 1, 2, ..., n,$$

dann ist diese zulässige Basislösung Optimallösung des klassischen Transportproblems.

S. 6. 8.
Ist für eine zulässige Basislösung des klassischen Transportproblems für wenigstens ein Feld (k, l) die Bedingung $c_{kl}^{'} < 0$, dann existiert eine neue zulässige Basislösung, die x_{kl} als Basisvariable enthält und für die genau eine ursprüngliche Basisvariable jetzt Nichtbasisvariable ist, so dass die zugehörigen Gesamttransportkosten gewiss nicht größer sind als für die ursprüngliche Lösung.

B. 6. 10. (***Algorithmus der modifizierten Distributionsmethode***)

1. Ermittle eine zulässige Basislösung.

2. Berechne gemäß Satz S. 6. 6. Die Größen $u_i,\ i = 1, 2, ...m;\ j = 1, 2, ..., n.$

3. Ermittle für die NichtbasisFelder die Größen

   $$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j\ .$$

4. Gilt

   $$c_{ij}^{'} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} \geq 0,\quad \forall i, j\ .$$

   so ist die Lösung optimal. Bestimme den optimalen Zielfunktionswert.

5. Gilt

$$c'_{ij} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} < 0, \quad \text{für mindestens ein } (i, j),$$

so ermittle

$$c'_{lk} = \underset{(i,j)}{Min}(c_{ij} - \bar{c}_{ij}) < 0.$$

6. Bilde ausgehend vom Feld (l,k) einen Zyklus. Kennzeichne die Ecken des Zyklus beginnend mit dem Feld (l,k) mit +, -,…,+.

7. Bestimme für die „Minus“-Felder die minimale Transportmenge. Addiere diese Größe zu den Transportmengen der „Plus“-Felder und subtrahiere sie von denen der „Minus“-Felder.

8. Gehe zurück zum Schritt 2.

<u>BS. 6. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Ausgehend von der nach der Methode von Vogel ermittelten zulässigen Basislösung, wird das Beispiel fortgesetzt:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i	u_i
P_1	6 4	7 + 10	3 **20**	10 7	2 **16 -**	36	1
P_2	3 **9**	9 **- 20**	6 2	8 6	1 + **4**	33	0
P_3	4 **11**	13 10	8 3	7 **20**	3 2	31	1
b_j	20	20	20	20	20	100	
v_j	3	9	2	6	1		

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	a_i	u_i
P_1	6 1	7 **16**	3 **20**	10 4	2 1	36	-2
P_2	3 **9**	9 **4**	6 5	8 6	1 **20**	33	0
P_3	4 **11**	13 10	8 6	7 **20**	3 2	31	1
b_j	20	20	20	20	20	100	
v_j	3	9	5	6	1		

$z_1 = 439$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 20 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 20 \\ 11 & 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \qquad z^* = 439$$

<u>B. 6. 11.</u> (*Mehrdeutige Optimallösung*)
Gilt für die optimale Lösung eines klassischen Transportproblems

$$c_{ij}^{'} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} = 0 \quad \text{für mindestens ein Nichtbasisfeld,}$$

dann hat das Problem mindestens eine weitere Optimallösung. Diese erhält man indem man die entsprechende Variable zur Basisvariablen macht und einen weiteren Schritt rechnet. Seien x^{*1} und x^{*2} die dabei erhaltenen optimale Basislösungen. Dann stellt

$$x^* = \alpha x^{*1} + (1-\alpha)x^{*2}, \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

alle Optimallösungen des klassischen Transportproblems dar.

<u>BS. 6. 2</u>
Vier Fabriken $F_i, i = 1,2,3,4,$ stellen ein homogenes Gut her, welches von sechs Baustellen $B_j, i = 1,2,...,6,$ benötigt wird. Das Produkt steht in folgenden Mengeneinheiten zur Verfügung:

$F_1 : 11$ ME, $F_2 : 12$ ME, $F_3 : 18$ ME, $F_4 : 17$ ME.

Der Bedarf der Baustellen beträgt:

$B_1 : 20$ ME, $B_2 : 8$ ME, $B_3 : 6$ ME, $B_4 : 7$ ME, $B_5 : 8$ ME, $B_6 : 9$ ME .
Die Entfernungen zwischen den Fabriken $F_i, i = 1,2,3,4,$ und den Baustellen $B_j, i = 1,2,...,6,$ sind in folgender Tabelle angegeben:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
F_1	15	22	18	26	16	25
F_2	12	18	19	20	21	19
F_3	14	21	25	18	17	13
F_4	20	22	21	20	16	18

Der Bedarf der Baustellen beträgt:

$B_1 : 20$ ME, $B_2 : 8$ ME, $B_3 : 6$ ME, $B_4 : 7$ ME, $B_5 : 8$ ME, $B_6 : 9$ ME

Es ist ein Transportplan mit minimalen Kosten für den Transport des Gutes aufzustellen. Dabei werden die Transportkosten den Entfernungen proportional angenommen.

Lösung:
Wir ermitteln zunächst eine zulässige Basislösung nach *VAM*:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i	u_i
F_1	15 + 16	22 - **5**	18 **6**	26 20	16 16	25 15	11	2
F_2	12 **12**	18 18	19 14	20 16	21 12	19 11	12	-2
F_3	14 **8** -	21 20	25 16	18 **1** +	17 14	13 **9**	18	0
F_4	20 16	22 **3** +	21 18	20 **6** -	16 **8**	18 15	17	2
b_j	20	8	6	7	8	9	58	
v_j	14	20	16	18	14	13		

$z_0 = 923$,
$\min\{5,6,8\} = 5$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i	u_i
F_1	15 **5**	22 21	18 **6**	26 19	16 15	25 14	11	-1
F_2	12 **12**	18 18	19 15	20 16	21 12	19 11	12	-4
F_3	14 **3**	21 20	25 17	18 **6**	17 14	13 **9**	18	-2
F_4	20 16	22 **8**	21 19	20 **1**	16 **8**	18 15	17	0
b_j	20	8	6	7	8	9	58	
v_j	16	22	19	20	16	15		

$z_1 = 918 = z^*$

Allerdings ist die Optimallösung wegen $c_{22}^* = c_{22} = 8$ mehrdeutig.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i	u_i
F_1	15 **5**	22 21	18 **6**	26 19	16 15	25 14	11	-1
F_2	12 - **12**	18 + 18	19 15	20 16	21 12	19 11	12	-4
F_3	14 + **3**	21 20	25 17	18 - **6**	17 14	13 **9**	18	-2
F_4	20 16	22 - **8**	21 19	20 + **1**	16 **8**	18 15	17	0
b_j	20	8	6	7	8	9	58	
v_j	16	22	19	20	16	15		

$\min\{6,8,12\}=6$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
F_1	15 **5**	22 21	18 **6**	26 19	16 15	25 14	11
F_2	12 **6**	18 **6**	19 15	20 16	21 12	19 11	12
F_3	14 **9**	21 20	25 17	18	17 14	13 **9**	18
F_4	20 16	22 **2**	21 19	20 **7**	16 **8**	18 15	17
b_j	20	8	6	7	8	9	58

$$X^* = \alpha\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

B. 6. 12. (***Degeneration***)
Ist die Anzahl der positiven Komponenten einer zulässigen Basislösung kleiner als $m+n-1$, so wird es nicht möglich sein, alle $u_i,\ i=1,2,...,m;\ v_j,\ j=1,2,...,n,$ zu bestimmen. In diesem Falle wird in mindestens ein *geeignetes* leeres Feld ein Null eingetragen und weiter gerechnet.

BS. 6. 3.
Die Produzenten $P_i,\ i=1,2,3$ stellen ein homogenes Gut in folgenden Mengeneinheiten her:

$P_1:$ 1000 ME, $P_2:$ 700 ME, $P_3:$ 900 ME.

Das Produkt ist zu vier Endverbrauchern $V_j,\ j=1,2,3,4$, mit folgendem Bedarf zu transportieren:

$V_1:$ 900 ME, $V_2:$ 800 ME, $V_3:$ 500 ME, $V_4:$ 400 ME.

Die Transportkosten/ME sind in folgender Tabelle angegeben:

	V_1	V_2	V_3	V_4
P_1	2	2	2	4
P_2	4	6	4	3
P_3	3	2	1	0

Ausgehend von einer nach der Nord-West-Ecken-Methode erzeugten Startlösung, bestimmen Sie einen kostenminimalen Transportplan.

Lösung:

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i
P_1	2 **900**	2 **100**	2	4	1000
P_2	4	6 **700**	4	3	700
P_3	3	2	1 **500**	0 **400**	900
b_j	900	800	500	400	2600

$z_0 = 6700$

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	u_i
P_1	2 - **900**	2 + **100**	2 1	4 0	1000	0
P_2	4 + 6	6 **700 -**	4 5	3 4	700	4
P_3	3 2	2 2	1 **500**	0 **400**	900	0
b_j	900	800	500	400	2600	
v_j	2	2	1	0		

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	u_i
P_1	2 + **200**	2 **800**	2- **0**	4 1	1000	0
P_2	4 **- 700**	6 4	4 + 4	3 3	700	2
P_3	3 1	2 1	1 **500**	0 **400**	900	-1
b_j	900	800	500	400	2600	
v_j	2	2	2	1		

$z_1 = 5300$

	V_1	V_2	V_3	V_4	a_i	u_i
P_1	2 **200**	2 **800**	2 1	4 0	1000	0
P_2	4 **700**	6 4	4 3	3 2	700	2
P_3	3 2	2 **0**	1 **500**	0 **400**	900	0
b_j	900	800	500	400	2600	
v_j	2	2	1	0		

Damit ist die Lösung optimal und lautet:

$$X^* = \begin{pmatrix} 200 & 600 & 0 & 0 \\ 700 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 500 & 400 \end{pmatrix}, \qquad z^* = 5300\,.$$

D. 6. 3. (***Offenes Transportproblem***)
Ein *offenes Transportproblem* liegt vor, wenn

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

gilt.

B. 6. 13.
Ist

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

so wird ein *fiktiver Verbraucher* (d.h. eine zusätzliche Spalte) eingeführt, wobei die entsprechenden Transportkosten/ME (falls keine weiteren Angaben bekannt sind) gleich Null gesetzt werden.
Ist

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

so wird ein *fiktiver Produzent* (d.h. eine zusätzliche Spalte) eingeführt, wobei die entsprechenden Transportkosten/ME (falls keine weiteren Angaben bekannt sind) gleich Null gesetzt werden.

BS. 6. 4.

Ein Kraftverkehrsbetrieb hat drei Standorte S_1, S_2 und S_3, in denen Lastkraftwagen eines einheitlichen Typs in folgenden Mengen stehen:

$$K_1 : 12, \quad K_2 = 12, \quad K_3 : 12$$

Dieser Kraftverkehrsbetrieb führt für vier Betriebe B_1, B_2, B_3 und B_4 Transporte aus, die folgenden Bedarf haben:

$$B_1 : 6, \quad K_2 : 7, \quad B_3 : 12, \quad B_4 : 11$$

Vorgegeben sind weiter die Entfernungen der Standorte der Fahrzeuge zu den Betrieben:

	B_1	B_2	B_3	B_4
S_1	2	3	2	7
S_2	9	11	7	12
S_3	8	8	6	5

Es ist ein optimaler Bereitstellungsplan für die Kraftfahrzeuge tu ermitteln, bei welchem die auftretenden Leerkilometer minimiert werden.

Lösung:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_f	a_i
S_1	2	3	2	7	0	12
S_2	9	11	7	12	0	12
S_3	8	8	6	5	0	12
b_j	6	7	8	11	4	36

Wir bestimmen eine zulässige Basislösung nach *VAM:*

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_f	a_i	d_i
S_1	2 **6**	3 **6**	2	7	0	12	2, 0, 1
S_2	9	11	7 **8**	12	0 **4**	12	7, 2, 4
S_3	8	8 **1**	6	5 **11**	0 **0**	12	5, 1, 2
b_j	6	7	8	11	4	36	
d_j	6	5, 3	4, 1	2, 7	0		

$z_0 = 149$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_f	a_i	u_i
S_1	2 **6**	3 **6**	2 2	7 0	0 -5	12	-5
S_2	9 7	11 8	7 - **8**	12 5	0 + **4**	12	0
S_3	8 **7**	8 **1**	6 + **7**	5 **11**	0 **0** -	12	0
b_j	6	7	8	11	4	36	
v_j	7	8	7	5	0		

$z_1 = 147$

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_f	a_i	u_i
S_1	2 **6**	3 **6**	2 1	7 0	0 -6	12	-5
S_2	9 8	11	7 **8**	12 6	0 **4**	12	1
S_3	8 **7**	8 **1**	6 **0**	5 **11**	0 -2	12	0
b_j	6	7	8	11	4	36	
v_j	7	8	6	5	-1		

$z^* = z_1 = 147$

B. 6. 13.

Es kommt manchmal vor, dass einige Transportstrecken gesperrt werden müssen. In solchen Fällen sollte man die entsprechenden Transortkosten pro Mengeneinheit so hoch wählen, dass sie bei der Minimierung de Transportkosten unmöglich in Betracht kommen. Gewöhnlich wählt man hierzu als Kosten eine hinreichend große Zahl $M > 0$.

BS. 6. 5.

Die Fabriken F_1, F_2, F_3 Beliefern die Kauhallen K_1, K_2, K_3 mit einem bestimmten Nahrungsmittel. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Transportkosten pro Mengeneinheit, das Angebot der einzelnen Fabriken und den Bedarf der Kaufhallen:

Fabrik	Kaufhalle				Angebot
	K_1	K_2	K_3	K_4	
F_1	12	10	8	11	3
F_2	12	10	14	14	18
F_3	8	8	11	13	9
Bedarf	6	8	5	11	30

2. Bleibt die von Ihnen ermittelte Lösung optimal, wenn die Strecke F_3 nach K_1 wegen Bauarbeiten gesperrt wird?

1. Empfehlen Sie einen Transportplan mit minimalen Transportkosten.
2. Bleibt die von Ihnen ermittelte Lösung optimal, wenn die Strecke F_3 nach K_1 wegen Bauarbeiten gesperrt wird?

Lösung:

1.

Wir bestimmen eine zulässige Basislösung nach *VAM*

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i	d_i
F_1	12	10	8 **3**	11	3	2
F_2	12	10 **8**	14	14 **10**	18	2, 4, 0
F_3	8 **6**	8	11 **2**	13 **1**	9	0, 3, 2
b_j	6	8	5	11	30	
d_j	4	2	3	2, 1		

$z_0 = 327$

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i	u_i
F_1	12 5	10 6	8 **3**	11 10	3	-3
F_2	12 9	10 - **8**	14 12	14 + **10**	18	1
F_3	8 **6**	8 + 9	11 **2**	13 **1** -	9	0
b_j	6	8	5	11	30	
v_j	8	9	11	13		

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i	u_i
F_1	12 5	10 5	8 **3**	11 9	3	-3
F_2	12 10	10 **7**	14 13	14 **11**	18	2
F_3	8 **6**	8 **1**	11 **2**	13 12	9	0
b_j	6	8	5	11	30	
v_j	8	8	11	12		

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 11 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad z_1 = z^* = 326$$

2.

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i	u_i
F_1	12 M-3	10 5	8 **3**	11 9	3	-3
F_2	12 + M+2	10 **7** -	14 13	14 **11**	18	2
F_3	M - **6**	8 **1** +	11 **2**	13 12	9	0
b_j	6	8	5	11	30	
v_j	M	8	11	12		

	K_1	K_2	K_3	K_4	a_i	u_i
F_1	12 7	10 5	8 **3**	11 9	3	-5
F_2	12 **6**	10 **1**	14 13	14 **11**	18	0
F_3	M	8 **7**	11 **2**	13 12	9	-2
b_j	6	8	5	11	30	
v_j	12	10	13	14		

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad z^* = 338$$

(Letzte Aktualisierung: 11.11.2015)