Kapitel 5

Lineare Optimierung
Dualität

<u>D. 5. 1</u>: (*Dualität*)
Folgende Aufgaben der linearen Optimierung heißen *symmetrisch dual zueinander*:

$$\max\left\{ z = c^T x \mid Ax \le b,\ x \ge 0 \right\}$$

und

$$\min\left\{ Z = b^T \lambda \mid A^T \lambda \ge c,\ \lambda \ge 0 \right\}.$$

Folgende Aufgaben der linearen Optimierung heißen *asymmetrisch dual zueinander:*

$$\max\left\{ z = c^T x \mid Ax = b,\ x \ge 0 \right\}$$

und

$$\min\left\{ Z = b^T \lambda \mid A^T \lambda \ge c \right\}.$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned}
&c := (c_j),\ j = 1, 2, \ldots, n \\
&x := (x_j),\ j = 1, 2, \ldots, n \\
&A := (a_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n \\
&b := (b_i),\ i = 1, 2, \ldots, m \\
&\lambda := (\lambda_i),\ i = 1, 2, \ldots, m\ .
\end{aligned}$$

Die eine (in der Regel die vorliegende) Aufgabe heißt *Primal* und die andere (in der Regel die zu konstruierende) Aufgabe hießt *Dual*.

<u>S. 5. 1.</u>
Für jede zulässige Lösung x der primalen Aufgabe und jede beliebige zulässige Lösung der dualen Aufgabe λ gilt

$$z(x) \le Z(\lambda).$$

Beweis:
Aus der Nebenbedingung $A^T \lambda \ge c$ folgt die Ungleichung $\lambda^T A \ge c^T$, so dass sich wegen $x \ge 0,\ \lambda \ge 0$

$$z(x) = c^T x \le \lambda^T A x \le \lambda^T b = b^T \lambda = Z(\lambda)$$

ergibt.

S. 5. 2.
Ist für eine zulässige Lösung x^* der primalen Aufgabe und eine zulässige Lösung λ^* der dualen Aufgabe die Gleichung

$$z(x^*) = Z(\lambda^*)$$

erfüllt, so sind x^* und λ^* optimale Lösungen der jeweiligen Aufgaben.

Beweis:
Für eine beliebige zulässige Lösung λ^* der dualen Aufgabe folgt wegen S. 5. 2.

$$Z(\lambda^*) = z(x^*) \leq Z(\lambda).$$

Also ist λ^* eine optimale Lösung der dualen Aufgabe. Eine entsprechende Überlegung zeigt, dass auch x^* optimal ist.

S. 5. 3.
Ist die Zielfunktion der dualen Aufgabe auf der Menge ihrer zulässigen Lösungen nach unten nicht beschränkt, so besitzt die primale Aufgabe keine zulässige Lösung.

Beweis:
Würde die primale Aufgabe eine zulässige Lösung x besitzen, so müsste wegen S. 5. 1. Die Zielfunktion der dualen Aufgabe nach unten beschränkt sein. Das widerspricht der Annahme des Satzes, so dass die Menge der zulässigen Lösungen der primalen Aufgabe leer sein muss.

S. 5. 4.
Entweder besitzen beide Aufgaben des dualen Paares eine optimale Lösung, oder keine der beiden Aufgaben hat eine optimale Lösung. Im ersten Falle stimmen die Extremalwerte beider Probleme überein.

S. 5. 5.
Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit einer Aufgabe des dualen Paares ist, dass beide Aufgaben zulässige Lösungen besitzen.

Beweis:
Die Notwendigkeit der Bedingung ist trivial. Zum Beweis der hinreichenden Bedingung nehmen wir an, dass beide Probleme zulässige Lösungen besitzen. Dann ist die Menge der zulässigen Lösungen der primalen Aufgabe nicht leer und die Zielfunktion wegen Satz 5. 1. Nach oben beschränkt. Auf Grund von Satz S. 2. 9. Muss daher die primale Aufgabe eine optimale Lösung besitzen Die Lösbarkeit der dualen Aufgabe kann entsprechend gezeigt werden.

S. 5. 6.
Damit eine Aufgabe des dualen Paares zulässige Lösungen besitzt und die zweite Aufgabe über keine zulässigen Lösungen verfügt, ist notwendig und hinreichend, dass die Zielfunktion der ersten Aufgabe auf der Menge der zulässigen Lösungen nicht beschränkt ist.

Beweis.
Nach Satz S. 5. 3. Ist die Bedingung hinreichend. Zum Beweis der Notwendigkeit ziehen wir den Satz S. 5. 4. Heran. Eine Aufgabe des dualen Paares besitzt eine zulässige Lösung; sie kann jedoch nicht lösbar sein, weil sonst auch die zweite Aufgabe eine optimale Lösung

besitzen müsste (nach Voraussetzung hat die zweite Aufgabe keine zulässige Lösung). Nach Satz S. 2. 9. Kann daher die Unlösbarkeit der ersten Aufgabe nur dadurch verursacht werden, dass die Zielfunktion auf der Menge ihrer zulässigen Lösungen nicht beschränkt ist.

S. 5. 7.
Eine zulässige Lösung x^* der primalen Aufgabe ist dann und nur dann optimal, wenn eine zulässige Lösung λ^* der dualen Aufgabe mit $z(x^*) = Z(\lambda^*)$ existiert. λ^* ist dann Optimallösung der dualen Aufgabe. Entsprechendes gilt für duale Aufgabe.

Beweis:
Nach Satz S. 5. 2. Ist die Bedingung hinreichend. Zum Nachweis der Notwendigkeit nahmen wir an, dass x^* optimal ist. Dann besitzt auch die duale Aufgabe eine optimale Lösung λ^*, und es gilt $z(x^*) = Z(\lambda^*)$.
Bei der Untersuchung des dualen Paares können drei Fälle auftreten:

1. Beide Aufgaben besitzen zulässige Lösungen;
2. Nur eine Aufgabe hat zulässige Lösungen;
3. Beide Aufgaben besitzen keine zulässigen Lösungen.

Im ersten Fall sind die Aufgaben des dualen Paares lösbar, in den beiden weiteren Fällen unlösbar.

B. 5. 1.
Kennt man von jede Aufgabe des dualen Paares eine zulässige Lösung (x^* bzw. λ^*), so kann der Maximalwert $z_{\max}$ der primalen Aufgabe und der Minimalwert $Z_{\min}$ der dualen Aufgabe durch

$$z(x) \le z_{\max} = Z_{\min} \le Z(\lambda^*)$$

eingeschlossen werden.

B. 5. 2. (*Dualität und die Simplexmethode*)
Die Dualität liefert numerisch den Vorteil, dass man mit der Lösung einer Aufgabe des Dualpaares gleichzeitig die Lösung der anderen Aufgabe bekommt. Der nachfolgende Satz gibt Auskunft über die Beziehungen zwischen den optimalen Lösungen des dualen Paares im optimalen Simplextableau:

S. 5. 8.
Eine zulässige Lösung mit den Komponenten $x_1, x_2, \ldots x_{m+k}$ der primalen Aufgabe

$$\max\{c^T x \mid Ax + x' = b',\ x \ge 0,\ x' \ge 0\}, \quad \text{mit } x' := \begin{pmatrix} x_{k+1} & . & . & . & x_{k+m} \end{pmatrix}^T$$

ist dann und nur dann eine optimale Lösung, wenn es eine zulässige Lösung mit den Komponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{m+k}$ der dualen Aufgabe

$$\max\{-b^T \lambda \mid A^T \lambda - \lambda' = c,\ \lambda \ge 0,\ \lambda' \ge 0\}, \quad \text{mit} \lambda' := \begin{pmatrix} \lambda_{k+1} & . & . & . & \lambda_{k+m} \end{pmatrix}^T$$

mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. Für alle Indizes i mit $x_i > 0$ gilt $\lambda_{m+i} = 0$, $\quad i = 1, 2, ..., k$;
2. Für alle Indizes i mit $\lambda_{m+i} > 0$ gilt $x_i = 0$, $\quad i = 1, 2, ..., k$;
3. Für alle Indizes j mit $\lambda_j > 0$ gilt $x_{k+j} = 0$, $\quad j = 1, 2, ..., m$;
4. Für alle Indizes j mit $x_{k+j} > 0$ gilt $\lambda_j = 0$, $\quad j = 1, 2, ..., m$.

Dann ist die zulässige Lösung der dualen Aufgabe eine optimale Lösung des Dualproblems.

BS. 5. 1.
Gegeben sei das Problem

$$\begin{aligned} &Z = 5\lambda_1 + \lambda_2 \to \min! \\ &3\lambda_1 + \lambda_2 \geq 9 \\ &\lambda_1 + \lambda_2 \geq 5 \\ &\lambda_1 + 8\lambda_2 \geq 8 \\ &\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Dualisieren Sie diese Aufgabe.
2. Lösen Sie das Dualproblem.
3. Geben Sie die Lösungen des Primal- und des Dualproblems an.
4. Interpretieren Sie die Dualvariablen.

Lösung:
1.

$$\begin{aligned} &z = 9x_1 + 5x_2 + 8x_3 \to \max! \\ &3x_1 + x_2 + x_3 \leq 5 \\ &x_1 + x_2 + 8x_3 \leq 1 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

2.
Normalform:

$$\begin{aligned} &z = 9x_1 + 5x_2 + 8x_3 \to \max! \\ &3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ &x_1 + x_2 + 8x_3 + x_5 = 1 \\ &x_i \geq 0, \; i = 1, 2, ..., 5. \end{aligned}$$

3.

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_4	3	1	1	1	0	5
x_5	1	1	8	0	1	1
z	-9	-5	-8	0	0	0
x_4	0	-2	-23	1	-3	2
x_1	1	1	8	0	1	1
z	0	4	64	0	9	9

$$x^* = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}^T, \qquad \lambda^* = \begin{pmatrix}0 & 9 & 0 & 4 & 64\end{pmatrix}^T, \quad z_{\max} = Z_{\min} = 9$$

(Unter den Schlupfvariablen des gelösten Problems finden wir in der letzten Zeile des Endtableaus in der gegebenen Reihenfolge die Komponenten der Optimallösung des anderen Problems. Unter den Problemvariablen des gelösten Problems finden wir in der letzten

4.
$x_1 = 1$ bedeutet: Eine Erhöhung der rechten Seite der ersten Nebenbedingung des gegebenen Problems, nämlich 9, um eine Einheit bewirkt eine Erhöhung des optimalen Zielfunktionswertes um 1 Einheit. Wegen $x_2 = x_3 = 0$ hat die Erhöhung der rechten Seite der zweiten bzw. der dritten Nebenbedingung des gegebenen Problems keine Auswirkung auf den optimalen Wert der Zielfunktion.

<u>BS. 5. 2.</u> (Siehe das Beispiel BS. 4. 6.**)**
Gegeben sei das Problem

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 40x_2 &-> \min \\
6x_1 \quad + x_2 &\geq 18 \\
x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\
2\,x_1 + \quad x_2 &\geq 10 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Lösen Sie das Problem durch das entsprechende Dualproblem.

Lösung:

1.

$$
\begin{aligned}
Z = 18\lambda_1 + 12\lambda_2 + 10\lambda_3 &\to \max \\
6\lambda_1 \quad + \lambda_2 + 2\lambda_3 &\leq 20 \\
\lambda_1 \quad + 4\lambda_2 \quad + \lambda_3 &\leq 40 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

<u>Normalform:</u>

$$
\begin{aligned}
Z = 18\lambda_1 + 12\lambda_2 + 10\lambda_3 &\to \max \\
6\lambda_1 \quad + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \qquad &= 20 \\
\lambda_1 + 4\lambda_2 \quad + \lambda_3 \qquad + \lambda_5 &= 40 \\
\lambda_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.&
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_0
λ_4	6	1	2	1	0	20
λ_5	1	4	1	0	1	40
Z	-18	-12	-10	0	0	0
λ_1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{3}$
λ_5	0	$\frac{23}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{110}{3}$
Z	0	-9	-4	3	0	60
λ_1	1	0	$\frac{7}{23}$	$\frac{4}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{40}{23}$
λ_2	0	1	$\frac{4}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{220}{23}$
Z	0	0	$-\frac{56}{23}$	$\frac{60}{23}$	$\frac{54}{23}$	$\frac{3360}{23}$
λ_3	$\frac{23}{7}$	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{40}{7}$
λ_2	$-\frac{4}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{60}{7}$
Z	8	0	0	4	2	160

$$x^* = \begin{pmatrix}4 & 2 & 8 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \quad \lambda^* = \begin{pmatrix}0 & 60/7 & 40/7 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \; z^* = Z^* = 160$$

(Letzte Aktualisierung: 22 .11.2016)