Kapitel 4

Lineare Optimierung
Simplexmethode

B. 4. 1. (***Grundidee***)
Die Grundidee der Simplexmethode besteht darin, ausgehend von einem (bekannten) Eckpunkt der Menge der zulässigen Lösungen sich zu einem benachbarten Eckpunkt zu bewegen und dabei stets den Zielfunktionswert bis zum optimalen Wert zu verbessern. Ist ein solcher Eckpunkt nicht unmittelbar gegeben, so wird er zuerst danach gesucht und wenn gefunden, so wird wie oben beschrieben verfahren.

B. 4. 2.
Wir gehen von folgender Problemstellung aus:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max!$$

$$\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1,n-m}x_{n-m} + x_{n-m+1} & & & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2,n-m}x_{n-m} & + x_{n-m+2} & & = b_2 \\
. & & & \\
. & & & \\
. & & & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_m x_{n-m} & & + x_n & = b_m \\
x_1, x_2, ..., x_n \geq 0; \quad b_1, b_2, ..., b_m \geq 0. & & &
\end{array}$$

oder in Matrizenschreibweise:

$$f = c^T x \to \max!$$
$$Ax_N + x_B = b$$
$$x \geq 0;\ b \geq 0,$$

Dabei sind:

$$x = \left(x_1, ..., x_n\right)^T,$$
$$x_N = \left(x_1, ..., x_{n-m}\right)^T,$$
$$x_B = \left(x_{n-m+1}, ..., x_n\right)^T$$
$$c = \left(x_1, ..., c_n\right)^T,$$
$$b = \left(b_1, ..., b_m\right)^T,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1,n-m} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2,n-m} \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ & & & . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & & & a_{m,n-m} \end{pmatrix}.$$

In diesem Falle ist $x_B = b \geq 0,\ x_N = 0$ eine zulässige Basislösung unserer linearen Optimierungsaufgabe.

Mit Hilfe der eingeführten Symbole lässt sich das Problem folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} f = c_N^T x_N + c_B^T x_B &\to \max! \\ x_B + A x_N &= b \\ x_B, x_N &\geq 0. \end{aligned}$$

Aus der obigen Nebenbedingung folgt:

$$x_B = b - A x_N.$$

Substituiert man diese Beziehung in die Zielfunktion, so erhält man

$$\begin{aligned} f &= c_B^T (b - A x_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T b - c_B^T A x_N + c_N^T x_N \\ &= c_B^T b - \left(c_B^T A + c_N^T\right) x_N. \end{aligned}$$

Sei

$$z := c_B^T A - c_N^T = \left(c_B^T a^1 - c_1,\ c_B^T a^2 - c_2, \ldots,\ c_B^T a^{n-m} - c_{n-m}\right),$$

wobei a^j die $j-te$ Spalte von A, $j = 1, 2, \ldots, n-m$, ist.

<u>S. 4. 1.</u> (*Optimalität*)
Eine zulässige Basislösung $x_B = b \geq 0,\ x_N = 0$ ist optimal, wenn

$$z_i = c_B^T a^j - c_j \geq 0 \text{ for } j = 1, 2, \ldots, n-m$$

gilt.

B. 4. 3. (***Das Simplextableau***)
Das entsprechende Ausgangstableau sieht wie folgt aus:

x_B	x_1	. . .	x_{n-m}	x_{n-m+1}	x_{n-m+2}	. . .	x_n	RHS
x_{n-m+1}	a_{11}		$a_{1,n-m}$	1	0	. . .	0	b_1
x_{n-m+2}	a_{21}		$a_{2,n-m}$	0	1	. . .	0	b_2
.	.			.	.	.	.	.
.	.			.	.	.	.	.
.	.			.	.	.	.	.
x_n	a_{m1}		$a_{m,n-m}$	0	0	. . .	1	b_m
z	z_1	. . .	z_{n-m}	0	0	. . .	0	$f = c_B^T b$

Es kann auch in folgender Form dargestellt werden:

x_B	x_N	x_B	RHS
x_B	A	I	b
z	$c_B^T A - c_N^T$	0	$c_B^T b$

Alg. 4. 1. (***Simplex- Algorithmus***)
Schritt1: Wähle eine Nichtbasisvariable, um sie zu einer Basisvariablen zu machen.
Die Nichtbasisvariable x_r wird durch folgende (Kann-)Regel gewählt:

$$z_r = \min_{j \in J} \left\{ z_j = c_B^T a^j - c_j \right\},\ z_r < 0.$$

Dabei ist J die Menge der Indizes der Nichtbasisvariablen.
Sind alle $z_j \geq 0,\ j \in J$, dann stellt diese Basislösung eine Optimallösung dar.

Schritt 2: Wähle eine Basisvariable, um sie zu einer Nichtbasisvariablen zu machen.
Sei x_B^i die $i-te$ Komponente von x_B. Dann wird x_B^p nach folgender Regel gewählt:

$$\varepsilon = \frac{x_B^p}{a_{pr}} = \min \left\{ \frac{x_B^i}{a_{ir}} \mid a_{ir} > 0,\ i = 1, \dots, m \right\}.$$

Gilt $a_{ir} < 0$ **für alle** $i = 1, 2, \dots, m$**, dann ist die Zielfunktion unbeschränkt auf der Menge der zulässigen Lösungen.**

Schritt 3: Das Pivotelement heißt nun a_{pr}. Die Koeffizienten des alten Tableaus seien mit a_{ij} bezeichnet.

Die Koeffizienten des neuen Tableaus, bezeichnet mit $a_{ij}^{'}$, werden folgendermaßen berechnet:

$$a_{pj}^{'} = \frac{a_{pj}}{a_{pr}}, \quad b_{p}^{'} = \frac{b_p}{a_{pr}}$$

$$a_{ij}^{'} = a_{ij} - a_{ir}\frac{a_{pj}}{a_{pr}}, \quad b_{i}^{'} = b_i - a_{ir}\frac{b_p}{a_{pr}}, \quad i \neq p$$

$$z_{j}^{'} = z_j - z_r\frac{a_{pj}}{a_{pr}}, \quad f' = f - z_r\frac{b_p}{a_{pr}}.$$

Durch Wiederholung der Schritte 1 – 3 wird eine Optimallösung gefunden

BS. 4. 1.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= 21x_1 + 24x_2 -> \max \\ 3x_1 + x_2 &\leq 33 \\ x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 80 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Lösung

Durch Einführung der Schlupfvariablen x_3, x_4 und x_5, erhalten wir die Normalform:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= 21x_1 + 24x_2 -> \max \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad &= 33 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 13 \\ 5x_1 + 8x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 80 \\ x_i \geq 0,\ i &= 1,2,\ldots,5 \end{aligned}$$

Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 33 \\ 13 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $x_B = (x_3, x_4, x_5)^T$, $x_N = (x_1, x_2)^T$, so dass

$$x_B = \begin{pmatrix} 33 \\ 13 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad x_N = 0$$

eine zulässige Basislösung darstellt mit $c_N^T = (21,\ 24),\ z = c_B^T b - c_N^T = (-21,\ \text{-}24)$. Es folgen nun die Simplextableaus:

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	3	1	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	13
x_5	5	8	0	0	1	80
z	-21	-24	0	0	0	0
x_3	$\frac{19}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	23
x_4	$\frac{3}{8}$	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	3
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-6	0	0	0	3	240
x_3	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	4
x_1	1	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
x_2	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	5
z	0	0	0	16	1	288

$$x^* = (8 \quad 5 \quad 4 \quad 0 \quad 0)^T, \qquad z^* = 288$$

BS. 4. 2.

$$
\begin{aligned}
z = 40x_1 + 30x_2 &-> \max \\
x_1 + 3x_2 &\le 16 \\
2x_1 + x_2 &\le 17 \\
2x_1 + 3x_2 &\le 23 \\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Lösung:

Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 40x_1 + 30x_2 &-> \max \\
x_1 + 3x_2 + x_3 &= 16 \\
2x_1 + x_2 + x_4 &= 17 \\
2x_1 + 3x_2 + x_5 &= 23 \\
x_i \ge 0,\ i &= 1,2,...,5
\end{aligned}
$$

Simplex Tableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	3	1	0	0	16
x_4	2	1	0	1	0	17
x_5	2	3	0	0	1	23
z	-40	-30	0	0	0	0
x_3	0	$\frac{5}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{2}$
x_5	0	2	0	-1	1	6
z	0	-10	0	20	0	340
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	3
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	7
x_5	0	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	0
z	0	0	4	18	0	370

$$x^* = \begin{pmatrix}7 & 3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \qquad z^* = 370$$

Die Optimallösung ist degeneriert.

BS. 4. 3.

$$\begin{aligned} z = 12x_1 + 18x_2 &-> \max \\ 2x_1 + 3x_2 &\le 33 \\ x_1 + x_2 &\le 15 \\ x_1 + 3x_2 &\le 27 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Lösung:

<u>Normalform</u>:

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 18x_2 -> \max& \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 33 \\
x_1 \quad + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 15 \\
x_1 + 3x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 27 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.&
\end{aligned}
$$

Simplex Tableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	2	3	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	15
x_5	1	3	0	0	1	27
z	-12	-18	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	-1	6
x_4	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	6
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	9
z	-6	0	0	0	6	162
x_1	1	0	1	0	-1	6
x_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	7
z	0	0	6	0	**0**	198
x_1	1	0	-1	3	0	12
x_5	0	0	-2	3	1	6
x_2	0	1	1	-2	0	3
z	0	0	6	**0**	0	198

Das Problem hat unendlich viele Optimallösungen:

$$x^* = \alpha(6 \quad 7 \quad 0 \quad 2 \quad 0)^T + (1-\alpha)(12 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 6)^T, \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

$z^* = 198.$

<u>BS. 4. 4.</u>

$$z = 18x_1 + 6x_2 -> \max$$
$$-4x_1 \ + 3x_2 \leq 6$$
$$-x_1 \ + 3x_2 \leq 15$$
$$x_1 - 4\ x_2 \leq 4$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Lösung:

<u>Normalform</u>:

$$z = 18x_1 + 6x_2 -> \max$$
$$-4x_1 \ + 3x_2 + x_3 \qquad = 6$$
$$-x_1 \ + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad = 15$$
$$x_1 - 4\ x_2 \qquad\qquad + x_5 = 4$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., 5$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	-4	3	1	0	0	6
x_4	-1	3	0	1	0	15
x_5	1	-4	0	0	1	4
z	-18	-6	0	0	0	0
x_3	0	-13	1	0	4	22
x_4	0	-1	0	1	2	19
x_1	1	-4	0	0	1	4
z	0	-78	0	0	18	72

Die Aufgabe hat keine Optimallösung, da die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben unbeschränkt ist.

<u>B. 4. 4.</u> (*Suche nach einer zulässigen Basislösung*)
Betrachtet sei das lineare Optimierungsproblem in der Normalform.

$$f = c^T x \to \max!$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0.$$

Sei $b \geq 0$.
Wir konstruieren folgendes "*künstliches* " lineares Optimierungsproblem:

$$\tilde{f} = -\sum_{i=1}^{m} y_i \to \max!$$
$$Ax + y = b$$
$$x, y \geq 0.$$

Dabei stellt $y = (y_1, ..., y_m)^T$ den Vektor der *künstlichen* Variablen dar. Offensichtlich ist x eine zulässige Lösung des ursprünglichen Problems, $y = 0$ eine Optimallösung des "*künstlichen*" Problems und $\tilde{f} = 0$.

$\tilde{f} < 0$ würde bedeuten, dass das ursprünglichen Problem keine zulässige Lösung besitz.

<u>BS. 4. 5.</u>

$$z = 12x_1 + 18x_2 -> \max$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 12$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 5x_2 \geq 30$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Lösung:

<u>Normalform</u>:

$$\begin{aligned} z &= 12x_1 + 18x_2 -> \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\quad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 \quad\; &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\quad - x_5 &= 30 \\ x_i \geq 0,\ i &= 1, 2, ..., 5. \end{aligned}$$

$$\tilde{f} = -x_6 > \max$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 10 \\
2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 + x_6 &= 30
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6.$$

$$x_6 = 30 - 2x_1 - 5x_2 + x_5$$

$$\tilde{f} = -30 + 2x_1 + 5x_2 - x_5 \to \max!$$

Simplextableau

(Suche nach einer zulässigen Basislösung)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_3	1	3	1	0	0	0	12
x_4	1	2	0	1	0	0	10
x_6	2	5	0	0	-1	1	30
z	-12	-18	0	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	**-2**	-5	0	0	1	0	-30
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	4
x_4	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	2
x_6	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	-1	1	10
z	-6	0	6	0	0	0	(72)
$\tilde{z}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	1	0	-10
x_2	0	1	1	-1	0	0	2
x_1	1	0	-2	3	0	0	6
x_6	0	0	-1	-1	-1	1	8
z	0	0	-6	18	0	0	(108)
$\tilde{z}$	0	0	1	1	1	0	-8

Wegen $\max \tilde{f} \neq 0$ gibt es keine zulässige Lösung. Damit hat das ursprüngliche Problem keine Lösung.

BS. 4. 6.

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 40x_2 -> \min \\
6x_1 \quad + x_2 \geq 18 \\
x_1 + 4x_2 \geq 12 \\
2\,x_1 + \quad x_2 \geq 10 \\
x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Lösung:

Standardform:

$$
\begin{aligned}
&-20x_1 - 40x_2 -> \max \\
&6x_1 \quad + x_2 - x_3 \qquad\qquad = 18 \\
&x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad = 12 \\
&2\,x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad - x_5 = 10 \\
&\qquad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., 5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f} = -\left(x_6 + x_7 + x_8\right) -> \max \\
&6x_1 \quad + x_2 - x_3 \qquad\qquad + x_6 \qquad\qquad = 18 \\
&x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad\qquad + x_7 \qquad = 12 \\
&2\,x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad - x_5 \qquad\qquad + x_8 = 10 \\
&\qquad x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., 8.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&x_6 = 18 - 6x_1 \quad - x_2 + x_3 \\
&x_7 = 12 \quad - x_1 - 4x_2 \qquad + x_4 \\
&x_8 = 10 - 2\,x_1 \quad - x_2 \qquad\qquad + x_5 \\
&x_6 + x_7 + x_8 = 40 - 9x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + x_5
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{f} = -40 + 9x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 - x_5 -> \max
$$

Simplextableau

(Suche nach einer zulässigen Basislösung)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_0
x_6	**6**	1	-1	0	0	1	0	0	18
x_7	1	4	0	-1	0	0	1	0	12
x_8	2	1	0	0	-1	0	0	1	10
z	20	40	0	0	0	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	**-9**	-6	1	1	1	0	0	0	-40
x_1	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	0	3
x_7	0	$\frac{23}{6}$	$\frac{1}{6}$	-1	0	$-\frac{1}{6}$	1	0	9
x_8	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$-\frac{1}{3}$	0	1	4
z	0	$\frac{110}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{10}{3}$	0	0	(-60)
$\tilde{z}$	0	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{3}{2}$	0	0	-13
x_1	1	0	$-\frac{4}{23}$	$\frac{1}{23}$	0	$\frac{4}{23}$	$-\frac{1}{23}$	0	$\frac{60}{23}$
x_2	0	1	$\frac{1}{23}$	$-\frac{6}{23}$	0	$-\frac{1}{23}$	$\frac{6}{23}$	0	$\frac{54}{23}$
x_8	0	0	$\frac{7}{23}$	$\frac{4}{23}$	-1	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{4}{23}$	1	$\frac{56}{23}$
z	0	0	$\frac{40}{23}$	$\frac{220}{23}$	0	$-\frac{40}{23}$	$-\frac{220}{23}$	0	$\left(-\frac{3360}{23}\right)$
$\tilde{z}$	0	0	$-\frac{7}{23}$	$-\frac{4}{23}$	1	$\frac{30}{23}$	$\frac{27}{23}$	0	$-\frac{56}{23}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{4}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	4
x_2	0	1	0	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	2
x_3	0	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{23}{7}$	-1	$-\frac{4}{7}$	$\frac{23}{7}$	8
z	0	0	0	$\frac{60}{7}$	$\frac{40}{7}$	*	*	*	-160
$\tilde{z}$	0	0	0	0	0	1	1	1	0

Damit würde am Ende dieser Phase eine zulässige Basislösung gefunden, die gleichzeitig die Optimallösung des ursprünglichen Problems darstellt

$$x^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad z^* = 160$$

"Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.", Jean-Baptiste le Rond d'Alembert

(Letzte Aktualisierung: 20.11.2017)