Kapitel 2

Lineare Optimierung
Einführung

B. 2. 1. (***Drei klassische Anwendungen***)
Im Folgenden führen wir die ersten drei klassischen (zivilen) Anwendungen der linearen Optimierung an:

BS. 2. 1. (***Produktionsplanoptimierung***)
Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Produkte P_1 und P_2 her. Die nachfolgende Tabelle enthält den Rohstoffverbrauch pro Produkteinheit, die verfügbaren Rohstoffmengen und die Gewinne pro Einheit der einzelnen Produkte:

	P_1	P_2	Verfügbarkeit
R_1	3	1	33
R_2	1	1	13
R_3	5	8	80
Gewinn/ME	21	24	

Es ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm zu finden.

BS. 2. 2. (***Das Diätproblem***)
Die nachfolgende Tabelle zeigt wie viele Mengeneinheiten Eiweiß, Fett und Kohlenhydrate in 100 g zweier Nahrungsmittel N_1 und N_2 enthalten sind, den täglichen Mindestbedarf einer Person an diesen Nährstoffen und die Preise in Euro von 100 g der Nahrungsmittel N_1 und N_2:

Nährstoffe	Nahrungsmittel		Täglicher Mindestbedarf
	N_1	N_2	
Eiweiß	3	1	15
Fett	1	1	11
Kohlenhydrate	2	8	40
Preis (in €/100g)	2	4	

Es ist ein kostenminimaler Diätplan aufzustellen.

BS. 2. 3. (***Das klassische Transportproblem***)
Drei Fabriken F_1, F_2 und F_3 beliefern die Lager L_1, L_2, L_3 und L_4 mit einem gewisse Produkt.
Die nachfolgende Tabelle zeigt die Kapazitäten der Fabriken, den Bedarf der einzelnen Lager und die Transportkosten pro Produkteinheit für die Transportwege.
Es ist ein kostenminimaler Transportplan aufzustellen.

	L_1	L_2	L_3	L_4	Kapazität
F_1	630	150	320	310	75
F_2	710	380	600	400	125
F_3	340	250	170	420	100
Bedarf	80	65	70	85	300

D. 2. 3. (***Lineares Optimierungsproblem***)
Unter einem *linearen Optimierungsproblem* versteht man folgendes Problem:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt \qquad (\textit{Zielfunktion})$$

unter folgenden *Nebenbedingungen:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq, \ =, \ \geq b_i, \quad i = 1,2,...,m$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0\,, \qquad (\textit{Nichtnegativitätsbedingung})$$

Dabei sind:

$$c_j,\ a_{ij},\ b_i \in R^1,\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n.$$

B. 2. 2.
Das Problem der linearen Optimierung lässt sich in Matrizenschreibweise folgendermaßen darstellen:

$$opt\left\{z = c^T x \mid Ax < (>=) b, x \geq 0\right\}.$$

Hier sind:

$$c := (c_j),\ j = 1,2,...,n$$
$$x := (x_j),\ j = 1,2,...,n$$
$$A := (a_{ij}),\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$$
$$b := (b_i),\ i = 1,2,...,m.$$

BS. 2. 4.
Formulieren Sie die Probleme in BS. 2. 1. – 2. 3. als Modelle der linearen Optimierung:

Lösung:

BS. 2. 1.:
Sei

$x_i,\ i = 1,2:$ Produktionsmenge P_i

$$z = 21x_1 + 24x_2 \to Max!$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\le 33 \\ x_1 + x_2 &\le 13 \\ 5x_1 + 8x_2 &\le 80 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

BS. 2. 2.:
Sei

$x_i,\ i = 1,2:$ Nahrungsmittel N_i

$$z = 2x_1 + 4x_2 \to Min!$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\ge 15 \\ x_1 + x_2 &\ge 11 \\ 2x_1 + 8x_2 &\ge 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

BS. 2. 3.:
Sei

$x_{ij},\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n:$ Transportmenge von F_i zu L_j

$$\begin{aligned} z = {} & 630x_{11} + 150x_{12} + 320x_{13} + 310x_{14} \\ & + 710x_{21} + 380x_{22} + 600x_{23} + 400x_{24} \\ & + 340x_{31} + 250x_{32} + 170x_{33} + 420x_{34} -> Min! \end{aligned}$$

unter den Bedingungen:

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & & & & & & & & & & & = 75 \\
& & & & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & & & & & & & & = 125 \\
& & & & & & & & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & & & & & = 100 \\
x_{11} & & & & + x_{21} & & & & + x_{31} & & & & & = 80 \\
& x_{12} & & & & + x_{22} & & & & + x_{32} & & & & = 65 \\
& & x_{13} & & & & + x_{23} & & & & + x_{33} & & & = 70 \\
& & & x_{14} & & & & + x_{24} & & & & + x_{34} & & = 85
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4.$$

D. 2. 4. (***Normalform***)
Ein lineares Optimierungsproblem liegt in der Normalform vor, wenn es folgende Gestalt hat:

$$\max \left\{ z = c^T x \mid Ax = b, x \geq 0 \right\}.$$

BS. 2. 5.
Überführen Sie die Probleme in BS. 2. 1. und BS. 2. 2. in die Normalform.

Lösung:

BS. 2. 1.:

$$z = 21x_1 + 24x_2 \rightarrow Max!$$

unter den Bedingungen:

$$
\begin{array}{l}
3x_1 + x_2 + x_3 = 33 \\
x_1 + x_2 + x_4 = 13 \\
5x_1 + 8x_2 + x_5 = 80 \\
x_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,5.
\end{array}
$$

BS. 2. 2.:

$$-2x_1 - 4x_2 \rightarrow Max!$$

unter den Bedingungen:

$$
\begin{array}{l}
3x_1 + x_2 - x_3 = 15 \\
x_1 + x_2 - x_4 = 11 \\
2x_1 + 8x_2 - x_5 = 40 \\
x_i \geq 0,\ i = 1,2,\dots,5.
\end{array}
$$

BS. 2. 6.
Überführen Sie folgendes Problem der linearen Optimierung in die Normalform:

$$x_1 + x_2 \to Min!$$

unter den Nebenbedingungen

$$-3 \le x_1 \le +3$$
$$-2 \le x_2 \le +2$$

Lösung:

$$\begin{cases} x_1 \le 3 \\ x_1 \ge -3 \\ x_2 \le +2 \\ x_2 \ge -2 \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{cases} x_1 \le 3 \\ -x_1 \le 3 \\ x_2 \le 2 \\ -x_2 \le 2 \end{cases}$$

bzw.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 3 \\ -x_1 + x_4 = 3 \\ x_2 + x_5 = 2 \\ -x_2 + x_6 = 2 \\ x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0 \end{cases}$$

Sei nun

$$x_1 := y_1 - y_2$$
$$x_2 := y_3 - y_5$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0.$$

Dann lautet die Normalform:

$$-(y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) \to Max!$$

unter den Nebenbedingungen

$$y_1 - y_2 + x_3 = 3$$
$$-(y_1 - y_2) + x_4 = 3$$
$$y_3 - y_4 + x_5 = 2$$
$$-(y_3 - y_4) + x_6 = 2$$
$$x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_3 \ge 0.$$

Bzw.

$$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \rightarrow Max!$$

unter der Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{l} y_1 - y_2 \quad + x_3 = 3 \\ -y_1 + y_2 \quad + x_4 = 3 \\ \quad y_3 - y_4 \quad + x_5 = 2 \\ \quad -y_3 + y_4 \quad + x_6 = 2 \\ \quad x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_3 \geq 0 \end{array}$$

D. 2. 5. (***Schlupfvariable***)
Die Variablen, mit deren Hilfe aus Ungleichungen des Typs $\leq$ bzw. $\geq$ Gleichungen gemacht werden, heißen *Schlupfvariable*.

D. 2. 6. (***Zulässige Lösung, Menge der zulässigen Lösungen***)

Betrachtet sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform. Ein Punkt $\bar{x}$ mit $\bar{x} \geq 0$, $A\bar{x} = b$ heißt *zulässige Lösung*. Die Menge

$$M = \{\bar{x} \mid A\bar{x} = b, \ \ \bar{x} \geq 0\}$$

heißt die *Menge der zulässigen Lösungen*.

BS. 2. 1. (***Fortsetzung***)
Der Vektor

$$x = (4 \quad 6 \quad 15 \quad 3 \quad 12)^T \geq 0$$

ist eine zulässige Lösung dieses Problems, denn

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 4 \ + 6 + 15 = 33 \\ 4 + 6 + 3 = 13 \\ 5 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 12 = 80. \end{array}$$

D. 2. 7. (***Zulässige Basislösung***)

Eine zulässige Lösung $\bar{x}$ einer linearen Optimierungsaufgabe heißt eine *zulässige Basislösung*, wenn die Vektoren der Nebenbedingungen, die zu den positiven Komponenten von $\bar{x}$ gehören, linear unabhängig sind.

BS. 2. 1. (***Fortsetzung***)
Der Vektor

$$x = (0 \quad 10 \quad 23 \quad 3 \quad 0)^T \geq 0$$

ist eine zulässige Basislösung dieses Problems.

Er ist zulässig, da

$$3 \cdot 0 + 10 + 23 = 33$$
$$0 + 10 + 3 = 13$$
$$5 \cdot 0 + 8 \cdot 10 + 0 = 80\,.$$

Er ist auch eine Basislösung, da die Vektoren a_2, a_3 und a_4 wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

linear unabhängig sind.

<u>D. 2. 8.</u> (*Basis der zulässigen Basislösung, Basisvariable, Nichtbasisvariable*)
Ein System von m linear unabhängigen Vektoren der Nebenbedingungen, dass alle Vektoren der Nebenbedingungen a_j enthält, für die $x_j > 0$ ist, heißt *Basis der zulässigen Basislösung*. Die den Basisvektoren entsprechenden Komponenten der zulässigen Basislösung heißen *Basisvariable*, die übrigen Komponenten *Nichtbasisvariable*.

<u>BS. 2. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Die Vektoren a_2, a_3 und a_4 bilden eine Basis der zulässigen Basislösung

$$x = (0 \quad 10 \quad 23 \quad 3 \quad 0)^T\,.$$

Die Variablen x_2, x_3 und x_4 sind Basisvariable; x_1 und x_5 sind Nichtbasisvariable.

<u>S. 2. 1.</u>
Eine zulässige Basislösung kann höchstens m positive Komponenten besitzen.

<u>D. 2. 9.</u> (*Degenerierte und Nichtdegenerierte Basislösung*)
Sei r die Anzahl der positiven Elemente einer Basislösung. Is $r = m$, so heißt die Basislösung *nichtdegeneriert*. Im Falle $r < m$ heißt die Basislösung *degeneriert*.

<u>BS. 2. 1.</u> (*Fortsetzung*)
Die Basislösung $x = (0 \quad 10 \quad 23 \quad 3 \quad 0)^T$ ist nichtdegeneriert, da $r = m = 3$ gilt.

<u>BS. 2. 7.</u>
Gegeben sei das Problem

$$\begin{aligned} z = 40x_1 + 30x_2 &-> \max \\ x_1 + 3x_2 &\leq 16 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 17 \\ 2x_1 + 3\,x_2 &\leq 23 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

oder in der Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 40x_1 + 30x_2 -> \max \\
x_1 \ + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 16 \\
2x_1 \ \ + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 17 \\
2x_1 + 3\,x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 23 \\
x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5
\end{aligned}
$$

Wir zeigen, dass der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \geq 0$$

eine degenerierte zulässige Basislösung dieses Problems ist:

Die Lösung ist zulässig, da

$$
\begin{aligned}
&7 \ + 3 \cdot 3 = 16 \\
&2 \cdot 7 + 3 = 17 \\
&2 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 23
\end{aligned}
$$

Nun zeigen wir, dass die Vektoren a_1, a_2 und a_5 eine Basis bilden:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -5 \neq 0$$

Damit sind x_1, x_2 und x_3 und x_3 und x_4 Nichtbasisvariable.

Andererseits kann man zeigen, dass auch die Vektoren a_1, a_2 und a_3 eine Basisbilden:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Damit ist im Falle einer degenerierten Lösung die Basis nicht eindeutig.

D. 2. 10. **(*Optimallösung*)**
Eine zulässige Lösung x^* heißt *Optimallösung* eines linearen Optimierungsproblems, wenn

$$c^T x^* \geq c^T x,\ \forall x \in M.$$

S. 2. 2.
Die Menge der zulässigen Lösungen einer linearen Optimierungsaufgabe ist konvex, falls sie nicht leer ist.

Beweis:
Sei M die Menge der zulässigen Lösungen einer linearen Optimierungsaufgabe in der Normalform. Enthält M nur ein Element, so ist die Behauptung des Satzes offensichtlich richtig. Betrachtet seien jetzt zwei zulässige Lösungen x^1 und x^2.
Dann muss gelten:

$$Ax^1 = b, \quad x^1 \geq 0\,,$$
$$Ax^2 = b, \quad x^2 \geq 0\,.$$

Für die konvexe Linearkombination $\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$ folgt wegen $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ und der obigen Gleichungen:

$$A\left(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2\right) = \alpha_1 A x^1 + \alpha_2 A x^2 = \alpha_1 b + \alpha_2 b = b,$$
$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 \geq 0.$$

Also gehrt jede konvexe Linearkombination auch der Menge M an.

D. 2. 11. (***Eckpunkt***)

Ein Punkt $\bar{x}$ der Menge der zulässigen Lösungen M heißt Eckpunkt von M, wenn $\bar{x}$ sich nicht als streng konvexe Linearkombination zweier verschiedener Punkte aus M darstellen lässt.

S. 2. 3.
Jeder Eckpunkt der Menge der zulässigen Lösungen M stellt eine zulässige Basislösung dar und umgekehrt.

S. 2. 4.
Die Menge der zulässigen Lösungen hat höchstens endlich viele Eckpunkte.

S. 2. 5
Ist die Menge der zulässigen Lösungen nicht leer, so besitzt sie wenigstens einen Eckpunkt.

S. 2. 6.
Bildet die Menge der zulässigen Lösungen M ein konvexes Polyeder, so lässt sich jeder Punkte von M als konvexe Linearkombination der endlich vielen Eckpunkte darstellen.

S. 2. 7.
Besitzt eine lineare Optimierungsaufgabe eine optimale Lösung, dann nimmt die Zielfunktion ihr Maximum in mindestens einen Eckpunkt des Bereiches der zulässigen Lösungen an.

S. 2. 8.
Bildet die Menge der zulässigen Lösungen ein konvexes Polyeder und nimmt die Zielfunktion ihr Maximum in mehr als einen Eckpunkte an, so bestimmt auch jede konvexe Linearkombination dieser Eckpunkte eine Optimallösung.

S. 2. 9.
Ist die Menge der zulässigen Lösungen einer linearen Optimierungsaufgabe nicht leer und die Zielfunktion auf dieser Menge nach oben beschränkt (bei Maximierungsaufgaben), so existier wenigstens eine Optimallösung

(Letzte Aktualisierung: 18.08.2013)