

# Kapitel 4

## *Lineare Optimierung*

### *Die Simplexmethode*

## Lösungen

### 3. 1.

Sei

$x_1$ : Anzahl der hellen Stühle,

$x_2$ : Anzahl der dunklen Stühle.

Das Modell:

$$z = 100x_1 + 75x_2 \rightarrow \max!$$

$$x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 12$$

$$2x_1 + x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \geq 0: \text{ ganz.}$$

Die Normalform:

$$z = 100x_1 + 75x_2 \rightarrow \max!$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 30$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 5$$

$$x_1, x_2: \text{ ganz.}$$

*Simplextableau*

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$
$x_3$	1	1	1	0	0	20
$x_4$	<b>1</b>	0	0	1	0	12
$x_5$	2	1	0	0	1	30
$z$	<b>-100</b>	-75	0	0	0	0
$x_3$	0	1	1	-1	0	8
$x_1$	1	0	0	1	0	12
$x_5$	0	<b>1</b>	0	-2	1	6
$z$	0	<b>-75</b>	0	100	0	1200
$x_3$	0	0	1	<b>1</b>	-1	2
$x_1$	1	0	0	1	0	12
$x_2$	0	1	0	-2	1	6
$z$	0	0	0	<b>-50</b>	75	1650
$x_4$	0	0	1	1	-1	2
$x_1$	1	0	-1	0	1	10
$x_2$	0	1	2	0	-1	10
$z$	0	0	50	0	25	1750

$$x^* = (10 \ 10 \ 0 \ 2 \ 0)^T, \quad z^* = 1750 \text{ €}$$

### 3. 2.

Sei

$x_1$  : Produktionsmenge nach A,

$x_2$  : Produktionsmenge nach B,

$x_3$  : Produktionsmenge nach C.

Das Modell:

$$z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 \rightarrow \max!$$

$$10x_1 + 8x_2 + 5x_3 \leq 500$$

$$5x_1 + 10x_2 + 10x_3 \leq 400$$

$$5x_2 + 10x_3 \leq 600$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Die Normalform:

$$z = 20x_1 + 25x_2 + 15x_3 \rightarrow \max!$$

$$10x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 500$$

$$5x_1 + 10x_2 + 10x_3 + x_5 = 400$$

$$5x_2 + 10x_3 + x_6 = 600$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6.$$

*Simplextableau*

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_0$
$x_4$	10	8	5	1	0	0	500
$x_5$	5	<b>10</b>	10	0	1	0	400
$x_6$	0	5	10	0	0	1	600
$z$	-20	<b>-25</b>	-15	0	0	0	0
$x_4$	6	0	-3	1	$-\frac{4}{5}$	0	180
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{10}$	0	40
$x_6$	$-\frac{5}{2}$	0	5	0	$-\frac{1}{2}$	1	400
$z$	$-\frac{15}{2}$	0	10	0	$\frac{5}{2}$	0	1000
$x_1$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{15}$	0	30
$x_2$	0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	25
$x_6$	0	0	$\frac{15}{4}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{5}{6}$	1	475
$z$	0	0	$\frac{25}{4}$	$\frac{15}{12}$	$\frac{3}{2}$	0	1225

$$x^* = (30 \ 25 \ 0 \ 0 \ 0 \ 475)^T, \quad z^* = 1225 \text{ €}$$

**3. 3.**

1.

Sei

$x_i, i=1, 2$ : Produktionsmenge  $P_i$

Das Modell:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.

Vorbereitung des Modells für die Simplexmethode:

$$z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 10$$

$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\tilde{z} = -x_5 \rightarrow \text{Max!}$$

$$x_5 = 2 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$\tilde{z} = -2 + x_1 + x_2 - x_4 \rightarrow \text{Max!}$$

*Simplextableau*

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$
$x_3$	1	2	1	0	0	10
$x_5$	<b>1</b>	1	0	-1	1	2
$z$	-3	-2	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	-1	-1	0	1	0	-2
$x_3$	0	1	1	<b>1</b>	-1	8
$x_1$	1	1	0	-1	1	2
$z$	0	1	0	-3	3	6
$\tilde{z}$	0	0	0	0	1	0
$x_4$	0	1	1	<b>1</b>		8
$x_1$	1	2	1	0		10
$z$	0	4	3	0		30

$$x^* = (10 \ 0 \ 0 \ 8)^T$$

$$z^* = 30 \text{ GE}$$

### 3. 4.

1.

Sei

$x_i, i = 1, 2$ : Artikelmenge  $A_i$

Das Modell:

$$z = 500x_1 + 800x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 5x_2 \leq 24$$

$$6x_1 + 6x_2 \leq 36$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Die Normalform:

$$z = 500x_1 + 800x_2 \rightarrow \text{max!}$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_3 = 24$$

$$x_1 + 5x_2 + x_4 = 24$$

$$6x_1 + 6x_2 + x_5 = 36$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 5$$

*Simplextableau*

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$
$x_3$	5	2	1	0	0	24
$x_4$	1	<b>5</b>	0	1	0	24
$x_5$	6	6	0	0	1	36
$z$	-500	<b>-800</b>	0	0	0	0
$x_3$	$\frac{23}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{72}{5}$
$x_2$	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{24}{5}$
$x_5$	$\frac{24}{5}$	0	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{36}{5}$
$z$	<b>-340</b>	0	0	160	0	3840
$x_3$	0	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{23}{4}$	$\frac{15}{2}$
$x_2$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{2}$
$x_1$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{3}{2}$
$z$	0	0	0	$\frac{150}{2}$	$\frac{425}{6}$	4350

$$x^* = \left( \frac{3}{2} \quad \frac{9}{2} \quad \frac{15}{2} \quad 0 \quad 0 \right)^T, \quad z^* = 4350 \text{ €}$$

**3. 5.**

1.

Sei

$x_i, i=1, 2$ : Produktionsmenge  $P_i$

Das Modell:

$$z = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{Max!}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

2.

Normalform:

$$\begin{aligned}
 z &= 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{Max!} \\
 x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\
 x_1 + x_2 + x_4 &= 7 \\
 x_1 + x_5 &= 6 \\
 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
 \end{aligned}$$

*Simplextableau*

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$
$x_3$	1	2	1	0	0	10
$x_4$	1	1	0	1	0	7
$x_5$	1	0	0	1	1	6
$z$	-2	-4	0	0	0	0
$x_2$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	5
$x_4$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	2
$x_5$	1	0	0	0	1	6
$z$	0	0	2	0	0	20

Die Optimallösung ist mehrdeutig:

BV	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_0$
$x_2$	0	1	1	-1	0	4
$x_1$	1	0	-1	2	0	2
$x_5$	0	0	1	-2	1	2
$z$	0	0	2	0	0	20

$$x^* = \alpha \cdot x^{*,1} + (1-\alpha) \cdot x^{*,2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad z^* = 20$$

mit



$$x^{*1} = (0, 5, 0, 2, 6)^T, \quad x^{*2} = (2, 4, 0, 0, 2)^T.$$

*(Letzte Aktualisierung: 21.06.13)*