Lineare Optimierung

Dualität

Beispiel 1:
Folgende Tabelle zeigt den täglichen Bedarf eines Kindes an Vitaminen A und B, den Vitamingehalt pro Einheit dieser Vitamine in Obst und Milch und die Preise pro Einheit dieser Produkte:

	Vitamingehalt je Einheit		
	Obst	Milch	Täglicher Mindestbedarf
Vitamin A	2	4	40
Vitamin B	4	2	50
Preise	3	2.5	

Es soll ein kostenminimierender Diätplan aufgestellt werden.
Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.

Lösung:

Sei

x_1 : „Menge Obst"
x_2 : „Menge milch"

$$
\begin{aligned}
z = 3x_1 + 2.5x_2 &\rightarrow Min! \\
2x_1 + 4x_2 &\geq 40 \\
4x_1 + 2x_2 &\geq 50 \\
x_1, x_2 &\geq 0\,.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten nun folgende zwei Probleme:

Primal	**Dual**
$z = 3x_1 + 2.5x_2 \to Min!$	$Z = 40\lambda_1 + 50\lambda_2 \to Max!$
$2x_1 + 4x_2 \geq 40$	$2\lambda_1 + 4\lambda_2 \leq 3$
$4x_1 + 2x_2 \geq 50$	$4\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 2.5$
$x_1, x_2 \geq 0$	$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

Es zeigt sich nun, dass es interessante Beziehungen zwischen diesen beiden Problemen bestehen.

Es zeigt sich unter anderem, dass

- Mit der Lösung des einen Problems bekommen wir auch die Lösung des anderen Problems.

  (In diesem Fall werden wir sehen, dass es günstiger ist das Dualproblem zu lösen.).

- $$Min z = Max Z$$

- Die sog. Dualvariablen bzw. Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_j,\ j=1,2$ auch ökonomisch interpretieren werden können.

Wir lösen also das Dualproblem:

$$
\begin{aligned}
Z = 40\lambda_1 + 50\lambda_2 &\rightarrow Max! \\
2\lambda_1 + 4\lambda_2 &\leq 3 \\
4\lambda_1 + 2\lambda_2 &\leq 2.5 \\
\lambda_1, \lambda_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Normalform:

$$
\begin{aligned}
&Z = 40\lambda_1 + 50\lambda_2 \rightarrow Max! \\
&2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \qquad = 3 \\
&4\lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad + \lambda_4 = 2.5 \\
&\lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_0
λ_3	2	**4**	1	0	3
λ_4	4	2	0	1	$\frac{5}{2}$
Z	**-**40	**-50**	0	0	0
λ_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
λ_4	3	0	$-\frac{1}{2}$	1	1
Z	-15	0	$\frac{25}{2}$	0	$\frac{75}{2}$
λ_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$
λ_1	1	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
Z	0	0	10	5	$\frac{85}{2}$

$$\lambda^* = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{7}{12} \quad 0 \quad 0\right)^T, \qquad Z^* = \frac{85}{2}$$

$$x^* = \left(10 \quad 5 \quad 0 \quad 0\right)^T, \qquad z^* = \frac{85}{2}$$

Wo finden wir was?

- In der Z-Zeile unter der Schlupfvariablen des Dualproblems finden wir in der gegebenen Reihenfolge die Optimalwerte der Problemvariablen des Primalproblems.
- In der Z-Zeile unter den Problemvariablen des Dualproblems finden wir in der gegebenen Reihenfolge die Optimalwerte der Schlupfvariablen des Primalproblems.

- $$Min z = \frac{85}{2} = Max Z$$

Interpretation der Dualvariablen:

- $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ bedeutet:

  Wird nur die Mindestmenge von Vitamin A um eine Einheit erhöht, so erhöhen die Minimalkosten um etwa $\frac{1}{3}$ Geldeinheiten.

- $\lambda_2 = \frac{7}{12}$ bedeutet:

  Wird nur die Mindestmenge von Vitamin B um eine Einheit erhöht, so erhöhen die Minimalkosten um etwa $\frac{7}{12}$ Geldeinheiten.

Beispiel 2:

Das Primal:

$$z = 20x_1 + 40x_2 -> \min$$

$$\begin{aligned} 6x_1 \quad + x_2 &\geq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ 2\,x_1 + \quad x_2 &\geq 10 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Das Dual:

$$\begin{aligned} Z = 18\lambda_1 + 12\lambda_2 + 10\lambda_3 &\to \max \\ 6\lambda_1 \quad + \lambda_2 + 2\lambda_3 &\leq 20 \\ \lambda_1 \quad + 4\lambda_2 \quad + \lambda_3 &\leq 40 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Das Dualproblem in der <u>Normalform</u>:

$$\begin{aligned} Z = 18\lambda_1 + 12\lambda_2 + 10\lambda_3 &\to \max \\ 6\lambda_1 \quad + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 \qquad &= 20 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 \quad + \lambda_3 \qquad + \lambda_5 &= 40 \\ \lambda_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5. \end{aligned}$$

Simplextableau

BV	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_0
λ_4	6	1	2	1	0	20
λ_5	1	4	1	0	1	40
Z	-18	-12	-10	0	0	0
λ_1	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{3}$
λ_5	0	$\frac{23}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{110}{3}$
Z	0	-9	-4	3	0	60
λ_1	1	0	$\frac{7}{23}$	$\frac{4}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{40}{23}$
λ_2	0	1	$\frac{4}{23}$	$-\frac{1}{23}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{220}{23}$
Z	0	0	$-\frac{56}{23}$	$\frac{60}{23}$	$\frac{54}{23}$	$\frac{3360}{23}$
λ_3	$\frac{23}{7}$	0	1	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{40}{7}$
λ_2	$-\frac{4}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{60}{7}$
Z	8	0	0	4	2	160

$$x^* = \begin{pmatrix}4 & 2 & 8 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \quad \lambda^* = \begin{pmatrix}0 & 60/7 & 40/7 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \quad z^* = Z^* = 160$$