Lineare Optimierung

Simplex-Algorithmus

Beispiele

Beispiel 1:

$$z = 21x_1 + 24x_2 -> \max$$
$$3x_1 + x_2 \leq 33$$
$$x_1 + x_2 \leq 13$$
$$5x_1 + 8x_2 \leq 80$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Normalform:

$$z = 21x_1 + 24x_2 -> \max$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 \quad\quad &= 33 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad &= 13 \\ 5x_1 + 8x_2 \quad\quad + x_5 &= 80 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5 & \end{aligned}$$

Phase 0:

Eine zulässige Basislösung liegt vor, da die rechte Seite des Gleichungssystems nichtnegativ ist und die Anzahl der Einheitsvektoren gleich der Anzahl der Nebenbedingungen ist. Diese lautet $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 33 & 13 & 80 \end{pmatrix}^T$.

Wir gehen zur Phase 2.

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	3	1	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	13
x_5	5	8	0	0	1	80
z	-21	-24	0	0	0	0

Die Lösung ist nicht optimal, da die z-Zeile zwei negative Zahlen enthält. Die kleinere ist -24. Daher wählen wir die zweite Spalte als Pivotspalte.

Zur Wahl der Pivotzeile.

$$Min\left\{\frac{33}{1},\frac{13}{1},\frac{80}{8}\right\}=10\,.$$

Die Zeile 3 wird also als Pivotzeile gewählt. Das Pivotelement ist damit die Zahl 8.

Im nächsten Schritt wird aus der zweiten Spalte ein Einheitsvektor erzeugt und zwar eine 1 an der Stelle des Pivots und Nullen woanders.

Dazu dividieren wir die Pivotzeile durch das Pivotelement 8:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	3	1	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	13
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-21	-24	0	0	0	0

Die bisherige Basisvariable x_5 wird nun durch x_2 ersetzt.

Die Pivotzeile wird mit -1 multipliziert und das Produkt wird zu den entsprechenden Zahlen der ersten Zeile addiert:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	$\frac{19}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	23
x_4	1	1	0	1	0	13
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-21	-24	0	0	0	0

Jetzt wird die Pivotzeile mit -1 multipliziert und das Produkt zu den entsprechenden Elementen der zweiten Zeile addiert:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	$\frac{19}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	23
x_4	$\frac{3}{8}$	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	3
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-21	-24	0	0	0	0

Jetzt wird die Pivotzeile mit 24 multipliziert und das Produkt wird zu den entsprechenden Elementen der z-Zeile addiert:

x_3	$\frac{19}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	23
x_4	$\frac{3}{8}$	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	3
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-6	0	0	0	3	240

Damit ist das zweite Tableau fertig. Der Zielfunktionswert ist von 0 auf 240 gestiegen.

Die Lösung ist jedoch nicht optimal, da wir in der z-Zeile immer noch eine negative Zahl haben.

Also die erste Spalte ist die neue Pivotzeile.

Zur Wahl der Pivotzeile.

$$Min\left\{\frac{23}{\frac{19}{8}},\frac{3}{\frac{3}{8}},\frac{10}{\frac{5}{8}}\right\}=8\,.$$

Die Zeile 2 wird also als Pivotzeile gewählt. Das Pivotelement ist damit die Zahl $\frac{3}{8}$.

Die bisherige Basisvariable x_4 wird durch x_1 ersetzt. Wir dividieren nun die zweite Zeile durch das Pivotelement $\frac{3}{8}$:

x_3	$\frac{19}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	23
x_4	1	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-6	0	0	0	3	240

Jetzt wird jedes Element der Pivotzeile mit $-\frac{19}{8}$ multipliziert und das Produkt zu dem entsprechenden Element der ersten Zeile addiert:

x_3	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	4
x_4	1	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-6	0	0	0	3	240

Jetzt wird jedes Element der Pivotzeile mit $-\frac{5}{8}$ multipliziert und das Produkt zu dem entsprechenden Element der dritten Zeile addiert:

x_3	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	4
x_1	1	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
x_2	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	5
z	-6	0	0	0	3	240

Jetzt wird jedes Element der Pivotzeile mit 6 multipliziert und das Produkt zu dem entsprechenden Element der z-Zeile addiert:

x_3	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	4
x_1	1	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
x_2	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	5
z	0	0	0	16	1	288

Es gibt nun keine negative Zahl mehr in der z-Zeile. Damit ist die Lösung optimal.

Auf der nächsten Seite haben wir die ganze Tableaufolge und die Lösung.

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	3	1	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	13
x_5	5	8	0	0	1	80
z	-21	-24	0	0	0	0
x_3	$\frac{19}{8}$	0	1	0	$-\frac{1}{8}$	23
x_4	$\frac{3}{8}$	0	0	0	$-\frac{1}{8}$	3
x_2	$\frac{5}{8}$	1	0	0	$\frac{1}{8}$	10
z	-6	0	0	0	3	240
x_3	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	4
x_1	1	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$	8
x_2	0	1	0	1	$\frac{1}{3}$	5
z	0	0	0	16	1	288

$x^* = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad z^* = 288$

Beispiel 2:

$$z = 12x_1 + 18x_2 -> \max$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 33$$
$$x_1 + x_2 \le 15$$
$$x_1 + 3x_2 \le 27$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

Normalform:

$$z = 12x_1 + 18x_2 -> \max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 33 \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad &= 15 \\ x_1 + 3x_2 \quad\quad + x_5 &= 27 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5 & \end{aligned}$$

Phase 0:

Eine zulässige Basislösung liegt vor, da die rechte Seite des Gleichungssystems nichtnegativ ist und die Anzahl der Einheitsvektoren gleich der Anzahl der Nebenbedingungen ist. Diese lautet $x = (0 \quad 0 \quad 33 \quad 15 \quad 27)^T$.

Wir gehen zur Phase 2.

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	2	3	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	15
x_5	1	3	0	0	1	27
z	-12	-18	0	0	0	0

Wegen der negativen Werte in der z-Zeile ist die Lösung nicht optimal. Wir wählen die zweite Spalte als Pivotspalte.

Es gilt nun:

$$Min\left\{\frac{33}{3},\frac{15}{1},\frac{27}{3}\right\}=9$$

Damit ist 3 das Pivotelement und die dritte Zeile die neue Pivotzeile.

Jetzt tauschen wir die Variable x_5 gegen die Variable x_2 aus und dividieren die neue Pivotzeile durch das Pivotelement 3:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	2	3	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	15
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	9
z	-12	-18	0	0	0	0

Nun multiplizieren wir jedes Element der Pivotzeile mit:

- -3 und addieren das Produkt zu den Elementen der ersten Zeile.
- -1 und addieren das Produkt zu den Elementen der zweiten Zeile.
- 18 und addieren das Produkt zu den Elementen der z-Zeile.

Wir erhalten damit folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	0	1	0	-1	6
x_4	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	6
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	9
z	-6	0	0	0	6	162

Die negative Zahl -6 besagt, dass die Lösung noch nicht optimal ist. Nun ist die erste Spalte die Pivotspalte und wegen

$$Min\left\{\frac{6}{1},\frac{6}{\frac{2}{3}},\frac{9}{\frac{1}{3}}\right\}=6$$

die erste Zeile die Pivotzeile und die Zahl 1 das Pivotelement

Die erste Zeile wird abgeschrieben (formal abgeschrieben) und x_3 wird durch x_1 ersetzt.

Nun multiplizieren wir jedes Elemente der Pivotzeile mit:

- $-\frac{2}{3}$ und addieren das Produkt zu den Elementen der zweiten Zeile.
- $-\frac{1}{3}$ und addieren das Produkt zu den Elementen der dritten Zeile.
- +6 und addieren das Produkt zu den Elementen der z-Zeile.

Wir erhalten damit folgendes Tableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_1	1	0	1	0	-1	6
x_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	7
z	0	0	6	0	**0**	198

Da sich in der z-Zeile keine negative Zahl befindet, haben wir also die Optimalität erreich. Wir finden gleichzeitig in dieser Zeile eine 0 unter einem Nichteinheitsvektor. Dies besagt, dass die gefundene optimale Basislösung nicht die einzige ist. Um die weiteren Optimallösungen zu finden, wird ein weiterer Schritt berechnet.

Als Pivotspalte wird nun die 5. Spalte, unter der diese „besondere“ 0 befindet genommen. Wegen

$$Min\left\{\frac{2}{\frac{1}{3}},\frac{7}{\frac{2}{3}}\right\}=6$$

ist die zweite Zeile die neue Pivotzeile und $\frac{1}{3}$ das Pivotelement.

(Beachtet, dass 6 durch -1 nicht dividiert wird!)

x_4 wird durch x_5 ersetzt und die Pivotzeile durch das Pivotelement $\frac{1}{3}$ dividiert.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_1	1	0	1	0	-1	6
x_5	0	0	-2	3	1	6
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	7
z	0	0	6	0	**0**	198

Nun multiplizieren wir jedes Element der Pivotzeile mit:

- 1 und addieren das Produkt zu den Elementen der ersten Zeile.
- $-\frac{2}{3}$ und addieren das Produkt zu den Elementen der dritten Zeile.

Die z-Zeile ändert sich nicht.

Wir erhalten damit folgendes Endtableau:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_1	1	0	-1	3	0	12
x_5	0	0	-2	3	1	6
x_2	0	1	1	-2	0	3
z	0	0	6	**0**	0	198

Auf den nächsten zwei Seiten sehen wir die Tableaufolge und die Lösung des Problems.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	2	3	1	0	0	33
x_4	1	1	0	1	0	15
x_5	1	3	0	0	1	27
z	-12	-18	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	-1	6
x_4	$\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	6
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	9
z	-6	0	0	0	6	162
x_1	1	0	1	0	-1	6
x_4	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	2
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	7
z	0	0	6	0	**0**	198
x_1	1	0	-1	3	0	12
x_5	0	0	-2	3	1	6
x_2	0	1	1	-2	0	3
z	0	0	6	**0**	0	198

Das Problem hat unendlich viele Optimallösungen:

$$x^* = \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

$$z^* = 198.$$

Beispiel 3:

$$z = 18x_1 + 6x_2 -> \text{max}$$
$$-4x_1 \ + 3x_2 \leq 6$$
$$-x_1 \ + 3x_2 \leq 15$$
$$x_1 - 4\ x_2 \leq 4$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

Normalform:

$$z = 18x_1 + 6x_2 -> \text{max}$$

$$\begin{aligned} -4x_1 \ + 3x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 6 \\ -x_1 \ + 3x_2 \quad\quad + x_4 \quad &= 15 \\ x_1 - 4\ x_2 \quad\quad\quad + x_5 &= 4 \end{aligned}$$
$$x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., 5$$

Phase 0:

Eine zulässige Basislösung liegt vor, da die rechte Seite des Gleichungssystems nichtnegativ ist und die Anzahl der Einheitsvektoren gleich der Anzahl der Nebenbedingungen ist. Diese lautet $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 15 & 4 \end{pmatrix}^T$.

Wir gehen zur Phase 2.

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	-4	3	1	0	0	6
x_4	-1	3	0	1	0	15
x_5	1	-4	0	0	1	4
z	-18	-6	0	0	0	0

Wegen der negativen Werte in der z-Zeile ist die Lösung noch nicht optimal.

Wir wählen die erste Spalte als Pivotspalte.

In dieser Spalte gibt es nur ein positives Element 1. Daher wird die dritte Zeile als Pivotzeile und die Zahl 1 als Pivotelement gewählt und die Variable x_5 gegen x_1 ausgetauscht.

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	-4	3	1	0	0	6
x_4	-1	3	0	1	0	15
x_1	1	-4	0	0	1	4
z	-18	-6	0	0	0	0

Die Pivotzeile (die dritte Zeile) wird durch das Pivotelement 1 geteilt.

Nun multiplizieren wir jedes Element der Pivotzeile mit:

- $+4$ und addieren das Produkt zu den Elementen der ersten Zeile.
- $+1$ und addieren das Produkt zu den Elementen der zweiten Zeile.
- +18 und addieren das Produkt zu den Elementen der z-Zeile.

und erhalten:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	0	-13	1	0	4	22
x_4	0	-1	0	1	2	19
x_1	1	-4	0	0	1	4
z	0	-78	0	0	18	72

Das Problem ist wegen -78 nicht optimal. Allerdings gibt es in der Pivotspalte (2. Spalte) kein positives Element.

Daher ist die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt. Es gibt also keine Optimallösung.

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	-4	3	1	0	0	6
x_4	-1	3	0	1	0	15
x_5	1	-4	0	0	1	4
z	-18	-6	0	0	0	0
x_3	0	-13	1	0	4	22
x_4	0	-1	0	1	2	19
x_1	1	-4	0	0	1	4
z	0	-78	0	0	18	72

Beispiel 4:
Folgende Tabelle zeigt den täglichen Bedarf eines Kindes an Vitaminen A und B, den Vitamingehalt pro Einheit dieser Vitamine in Obst und Milch und die Preise pro Einheit dieser Produkte:

	Vitamingehalt je Einheit		
	Obst	Milch	Täglicher Mindestbedarf
Vitamin A	2	4	40
Vitamin B	4	2	50
Preise	3	2.5	

Es soll ein kostenminimierender Diätplan aufgestellt werden.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem nach der Simplexmodell
3. Interpretieren Sie die Lösung.

Lösung:

1.

Das Modell:

$$z = 3x_1 + 2.5x_2 -> Min$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\geq 40 \\ 4x_1 + 2\,x_2 &\geq 50 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Normalform:

$$z = -3x_1 - 2.5x_2 -> Max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 \quad &= 40 \\ 4x_1 + 2\,x_2 \quad - x_4 &= 50 \\ x_1,\ x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Phase 0:

Eine zulässige Basislösung liegt <u>nicht</u> vor. Die die rechte Seite des Gleichungssystems ist zwar nichtnegativ, aber es gibt <u>keine</u> Einheitsvektoren. Wir gehen zur Phase 1.

Wir führen durch die *künstlichen Variablen* x_5 und x_6 zwei Einheitsvektoren ein:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad &= 40 \\ 4x_1 + 2\,x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 &= 50 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,...6. \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned} x_5 &= 40 - 2x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_6 &= 50 - 4x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \end{aligned}$$

$$x_5 + x_6 = 90 - 6x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4$$

In Phase 1 wird nun mit folgender Zielfunktion gearbeitet:

$$\tilde{z} = -\left(x_5 + x_6\right) \rightarrow Max$$

bzw.

$$\tilde{z} = -90 + 6x_1 + 6x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow Max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad &= 40 \\ 4x_1 + 2\,x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 &= 50 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,...6. \end{aligned}$$

und stellen das Simplextableau auf:

Simplextableau

(Suche nach einer zulässigen Basislösung)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_5	2	4	-1	0	1	0	40
x_6	4	2	0	-1	0	1	50
z	3	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	-6	-6	1	1	0	0	-90

In Phase 1 ist die Zielfunktion $\tilde{z}$ relevant. Wir haben in dieser Zeile zwei negative Werte. Daher ist das Problem bezüglich $\tilde{z}$ nicht optimal. Wir wählen die $x_1-\text{Spalte}$ als Pivotspalte.

Wegen $$Min\left\{\frac{40}{2},\frac{50}{4}\right\}=\frac{25}{2}$$

ist die zweite Zeile die Pivotzeile und die Zahl 4 das Pivotelement.

Nun wird die Pivotzeile durch 4 geteilt.

Danach multiplizieren wir jedes Element der <u>transformierten</u> Pivotzeile mit:

- -2 und addieren das Produkt zu den Elementen der ersten Zeile.
- -3 und addieren das Produkt zu den Elementen der $z-\text{Zeile}$ Zeile.
- +6 und addieren das Produkt zu den Elementen der $\tilde{z}$ -Zeile.

und erhalten:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_5	0	3	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	15
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{2}$
z	0	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{75}{2}\right)$
$\tilde{z}$	0	-3	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	-15

Wegen -3 ist die Lösung bezüglich $\tilde{z}$ nicht optimal und wegen

$$Min\left\{\frac{15}{3}, \frac{\frac{25}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = 5$$

ist die Zahl 3 das Pivotelement.

Nun wird die Pivotzeile durch 3 geteilt.

Danach multiplizieren wir jedes Element der <u>transformierten</u> Pivotzeile mit:

- $-\frac{1}{2}$ und addieren das Produkt zu den Elementen der ersten Zeile.
- -1 und addieren das Produkt zu den Elementen der $z-\text{Zeile}$ Zeile.
- +3 und addieren das Produkt zu den Elementen der $\tilde{z}$ -Zeile.

und erhalten:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	5
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	10
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{85}{2}$
$\tilde{z}$	0	0	0	0	1	1	0

Wegen $Max\,z = 0$ haben wir eine zulässige Basislösung gefunden. Diese Lösung ist gleichzeitig die optimale Lösung, weil sich keine negative Zahl mehr in der z -Zeile befindet.

Die Optimallösung lautet:

$$x^* = \begin{pmatrix}10 & 5 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \quad Max z = \frac{85}{2}$$

Tableaufolge

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_5	2	4	-1	0	1	0	40
x_6	4	2	0	-1	0	1	50
z	3	$\frac{5}{2}$	0	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	-6	-6	0	0	0	0	-90
x_5	0	3	-1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	15
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{2}$
z	0	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\left(-\frac{75}{2}\right)$
$\tilde{z}$	0	-3	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	-15
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	5
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	10
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{85}{2}$
$\tilde{z}$	0	0	0	0	1	1	0

Beispiel 5:

$$z = 12x_1 + 18x_2 -> \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\ge 30 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Lösung:

Normalform:

$$\begin{aligned} z &= 12x_1 + 18x_2 \to \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 30 \\ x_i \ge 0,\ i &= 1,2,\ldots,5. \end{aligned}$$

Phase 0:

Eine zulässige Basislösung liegt <u>nicht</u> vor. Die rechte Seite des Gleichungssystems ist zwar nichtnegativ, aber es fehlt ein Einheitsvektor.

Wir gehen zur **Phase 1** und führen durch die *künstliche Variable* x_6 einen Einheitsvektor ein:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 + x_6 &= 30 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,6. \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$x_6 = 30 - 2x_1 - 5x_2 + x_5$$

In Phase 1 wird nun mit folgender Zielfunktion gearbeitet:

$$\tilde{z} = -x_6 \rightarrow Max$$

bzw.

$$\tilde{z} = -30 + 2x_1 + 2x_2 - x_5 \rightarrow Max$$

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad &= 10 \\ 2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 + x_6 &= 30 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,6. \end{aligned}$$

und stellen das Simplextableau auf:

Simplextableau

(Suche nach einer zulässigen Basislösung)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_3	1	3	1	0	0	0	12
x_4	1	2	0	1	0	0	10
x_6	2	5	0	0	-1	1	30
z	-12	-18	0	0	0	0	(0)
$\tilde{z}$	-2	-5	0	0	1	0	-30

Wegen der negativen Zahlen in der $\tilde{z}$- Zeile ist die Lösung bezüglich der Zielfunktion $\tilde{z}$ nicht optimal.

Wir wählen die x_2-Spalte als Pivotspalte und wegen

$$Min\left\{\frac{12}{3},\frac{10}{2},\frac{30}{5}\right\} = 4$$

die Zahl 3 als Pivot.

Nun wird die Pivotzeile durch 3 geteilt.

Danach multiplizieren wir jedes Element der <u>transformierten</u> Pivotzeile mit:

- \- 2 und addieren das Produkt zu den Elementen der zweiten Zeile.
- -5 und addieren das Produkt zu den Elementen der 3. Zeile Zeile.
- 18 und addieren das Produkt zu den Elementen der z-Zeile.
- 5 und addieren das Produkt zu den Elementen der $\tilde{z}$-Zeile

und erhalten:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	4
x_4	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	2
x_6	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	0	-1	1	10
z	-6	0	6	0	0	0	(72)
$\tilde{z}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	1	0	-10

Die Lösung ist wegen der negativen Zahl $-\frac{1}{3}$ nicht optimal.

Die x_1 - Spalte wird als Pivotspalte genommen und wegen

$$Min\left\{\frac{4}{\frac{1}{3}},\frac{2}{\frac{1}{3}},\frac{10}{\frac{1}{3}}\right\}=6$$

die x_4 - Zeile als Pivotzeile. Damit ist $\frac{1}{3}$ in dieser Zeile das Pivotelement.

Nun wird die Pivotzeile durch $\frac{1}{3}$ geteilt.

Danach multiplizieren wir jedes Element der <u>transformierten</u> Pivotzeile mit:

- $-\frac{1}{3}$ und addieren das Produkt zu den Elementen der ersten Zeile.
- $-\frac{1}{3}$ und addieren das Produkt zu den Elementen der 3. Zeile Zeile.
- +6 und addieren das Produkt zu den Elementen der z-Zeile.
- $\frac{1}{3}$ und addieren das Produkt zu den Elementen der $\tilde{z}$-Zeile

und erhalten:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_2	0	1	1	-1	0	0	2
x_1	1	0	-2	3	0	0	6
x_6	0	0	-1	-1	-1	1	8
z	0	0	-6	18	0	0	(108)
$\tilde{z}$	0	0	1	1	1	0	-8

Wegen $\max \tilde{z} = -8 \neq 0$ gibt es keine zulässige Lösung. Damit hat das Problem keine zulässige und damit auch keine Optimallösung.