# Lineare Optimierung

**Die Simplexmethode**

# Normalform

**Eine lineare Optimierungsaufgabe liegt in der Normalform vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:**

- **Die Zielfunktion ist zu maximieren.**
- **Alle Nebenbedingungen liegen in Gleichungsform vor.**
- **Alle Variablen sind nicht negativ.**

## Das Modell:

$$z = 21x_1 + 24x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 33 \\ x_1 + x_2 &\le 13 \\ 5x_1 + 8x_2 &\le 80 \\ x_1,\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

## Die Normalform:

$$z = 21x_1 + 24x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad &= 33 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 \quad &= 13 \\ 5x_1 + 8x_2 \qquad\quad + x_5 &= 80 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5 & \end{aligned}$$

## Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 18x_2 &\rightarrow \max \\
x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
2x_1 + 5x_2 &\geq 30 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

## Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 18x_2 &\rightarrow \max \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 10 \\
2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 30 \\
x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 18x_2 &\to \max \\
x_1 + 3x_2 &\le 12 \\
x_1 + 2x_2 &\le 10 \\
2x_1 + 5x_2 &\ge 30 \\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

**Die Normalform:**

$$
\begin{aligned}
z &= 12x_1 + 18x_2 \to \max \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 10 \\
2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 30 \\
x_i \ge 0,\ i &= 1,2,\ldots,5.
\end{aligned}
$$

## Das Modell:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} 6x_1 \quad + x_2 &\geq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ 2\,x_1 + \quad x_2 &\geq 10 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

## Die Normalform:

$$z = -20x_1 - 40x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} 6x_1 \quad + x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 18 \\ x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 12 \\ 2\,x_1 + \quad x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 10 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5. \end{aligned}$$

## Der Simplex-Algorithmus

Der Simplex-Algorithmus besteht aus 3 Phasen:

**Phase 0:**

Liegt eine zulässige Basislösung unmittelbar vor?

(Eine Basislösung ist unmittelbar vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. In der Normalform ist die rechte Seite des Gleichungssystems nicht negativ.
2. Die Anzahl der Einheitsvektoren in der Normalform ist genau gleich der Anzahl der Nebenbedingungen).

Wenn ja, gehe zur Phase 2. Wenn nein, gehe zur Phase 1.

**Phase 1:**

**S. 1. 1.**

Fülle durch Einführung sog. k*ünstlicher Variablen* die fehlenden Einheitsvektoren aus.

**S. 1. 2.**

Löse folgendes Problem:

$$\tilde{z} = -\sum_{k=1}^{s} x_k \to Max, \qquad s: \text{ Anzahl der künstlichen Variablen}$$

unter den gegebenen Nebenbedingungen.

**S. 1. 3.**

Eine zulässige Basislösung wurde gefunden. Gehe zu Phase 2.

$$Max\,\tilde{z}\begin{cases} = 0 \\ \neq 0 \end{cases}$$

Es gibt keine zulässige Basislösung. STOPP

**Phase 2:**

**S. 2. 1.**

Stelle das Gleichungssystem in tabellarischer Form dar:

| BV | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $x_{n+2}$ | $\cdots$ | $x_{n+m}$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_{n+1}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | 1 | 0 | $\cdots$ | 0 | $b_1$ |
| $x_{n+2}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | 0 | 1 | $\cdots$ | 0 | $b_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_{n+m}$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | 0 | 0 | ... | 1 | $b_m$ |
| $z$ | $-c_1$ | $-c_2$ | $\cdots$ | $-c_n$ | 0 | 0 | $\cdots$ | 0 | 0 |

BV: Basisvariable

Beachtet, dass die Zielfunktionskoeffizienten in der letzten Zeile mit umgekehrtem Vorzeichen eingetragen werden.

**S. 2. 1. (Optimalitätstest)**

Hier können 3 Fälle eintreten:

Fall 1:

In der z-Zeile gib es mindestens eine negative Zahl. Dann ist die Lösung noch nicht optimal. Gehe zum Schritt S. 2. 2.

Fall 2:

Alle Zahlen in der z-Zeile sind nichtnegativ <u>und</u> es gibt eine Null unter einem Nichteinheitsvektor. Dann gibt es eine multiple Optimallösung.

Fall 3:

Alle Zahlen in der z-Zeile sind nichtnegativ. Die Lösung ist optimal.

Stopp!

**S. 2. 3. (Spaltenwahl zur Bestimmung des Pivots)**

Wähle eine Spalte mit einer (am besten kleinsten) negativen Zahl in der z-Zeile als Pivotspalte.

Gib es in dieser keine positive Zahl, so ist die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösung nach oben nicht beschränkt. Es gibt keine Optimallösung. STOPP!

**S. 2. 4. (Spaltenwahl zur Bestimmung des Pivots)**

Teile die Zahlen auf der rechten Seite des Gleichungssystems durch positive Elemente der bereits gewählten Pivotspalte. Wähle die Zeile mit dem kleinsten Quotienten als Pivotzeile.

**S. 2. 5. (Basistransformation)**

Transformiere die gefundene Spalte zu einem Einheitsvektor, wobei das Pivotelement zu 1 wird und die anderen Komponenten zu 0.

Die Schritte S. 2. 3. – S. 2. 5. werden so lange wiederholt bis die Optimallösung gefunden wird.