Lineare Optimierung

Beispiele und Anwendung

Modellierung und graphische Lösung

<u>Beispiel 1:</u>

Ein Betrieb stellt zwei Produkte P_1 und P_2 her . Dabei verwendet er die Rohstoffe R_1, R_2 und R_3 . Folgende Tabelle gibt Informationen über die maximal verfügbaren Rohstoffmengen, den Rohstoffverbrauch pro Produktionseinheit und die Die Gewinne per Produkteinheit an:

	P_1	P_2	Rohstoffmengen
R_1	3	1	33
R_2	1	1	13
R_3	5	8	80
Gewinn/ME	21	24	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem graphische.

2.

$$3x_1 + x_2 = 33$$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 33$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 11.$$

$$x_1 + x_2 = 13$$

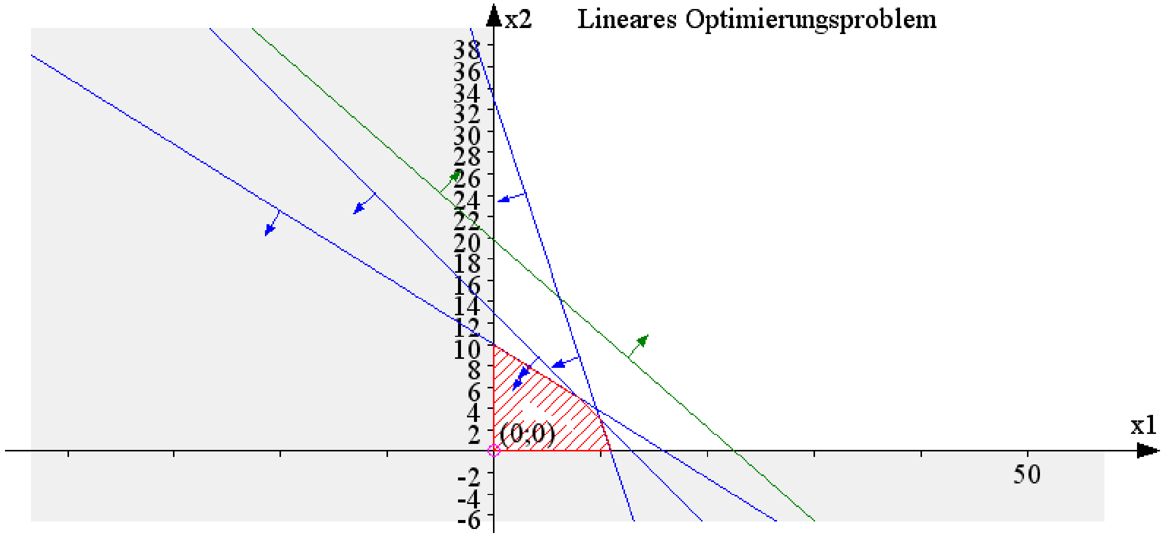
$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 13$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 13$$

$$5x_1 + 8x_2 \le 80$$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 10$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 16$$



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgender **Eckpunkte**:

$$P_0(0,0),\ P_1(0,10),\ P_3(8,5),\ P_4(10,3)\ ,\ P_5(11,0)$$

Nach der Theorie der linearen Optimierung

1. Ein Optimum eines linearen Optimierungsproblems wird immer in einem **Randpunkt** angenommen, falls es eine zulässige Lösung gibt.
2. Gibt es **nur** ein Optimum, so wird es in einem **Eckpunkt** angenommen.

Daher rechnen wir den Zielfunktionswert für die einzelnen Eckpunkte:

$P_0(0,0)$, $\quad z_0 = 0$

$P_1(0,10)$, $\quad z_1 = 240$

$P_2(8,5)$, $\quad z_3 = 288$

$P_5(10,3)$, $\quad z_4 = 282$

$P_5(11,0)$, $\quad z_5 = 231$

Damit hat das Problem ein eindeutiges Maximum:

$$x^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad z^* = 288.$$

Also der Betrieb erzielt einen maximalen Gewinn von 288 GE, wenn er vom P_1 8 Mengeneinheiten von P_2 5 Mengeneinheiten produziert.

Anmerkung (Grafische Darstellung der Zielfunktion):

- Die Zielfunktion stellt unendlich viele Geraden dar.

- Die Geraden laufen parallel zueinander. Es genügt damit eine darzustellen.

- Z.B., dass die Koeffizienten der Zielfunktion vertauscht auf Achsen eingetragen werden.

- Bei Maximierung (Minimierung) wird die Zielfunktion nach oben (unten) verschoben bis man einen Eckpunkt bzw. mehrere Eckpunkte der Menge der zulässigen Lösungen berührt und danach diese verlässt. Dieser Punkt bzw. diese Punkte realisieren die Maximallösung (en) des Problems.

Anmerkung (Grafische Darstellung der Zielfunktion):

- **Die Zielfunktion stellt unendlich viele Geraden dar.**

- **Die Geraden laufen parallel zueinander. Es genügt damit eine darzustellen.**

- **Z.B., dass die Koeffizienten der Zielfunktion vertauscht auf Achsen eingetragen werden.**

- **Bei Maximierung (Minimierung) wird die Zielfunktion nach oben (unten) verschoben bis man einen Eckpunkt bzw. mehrere Eckpunkte der Menge der zulässigen Lösungen berührt und danach sie verlässt. Dieser Punkt bzw. diese Punkte realisieren die Maximallösung (en) des Problems.**

Beispiel 2:

Das Beispiel 1 sei gegeben mit folgenden neuen Daten:

	P_1	P_2	Rohstoffmengen
R_1	2	3	33
R_2	1	1	15
R_3	1	3	27
Gewinn/ME	12	18	

Gesucht ist ein gewinnmaximierendes Produktionsprogramm.

1. Stellen Sie das Problem als ein Modell der linearen Optimierung dar.
2. Lösen Sie das Problem graphische.

Lösung:

1.

Sei x_i, $i = 1, 2$ :: Produktionsmenge P_i

Zielfunktion:

$$z = 12x_1 + 18x_2 -> \max$$

Nebenbedingungen:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 33$$
$$x_1 + x_2 \leq 15$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 27$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

$$2x_1 + 3x_2 = 33$$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 11$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{33}{2}$$

$$x_1 \ + x_2 = 15$$

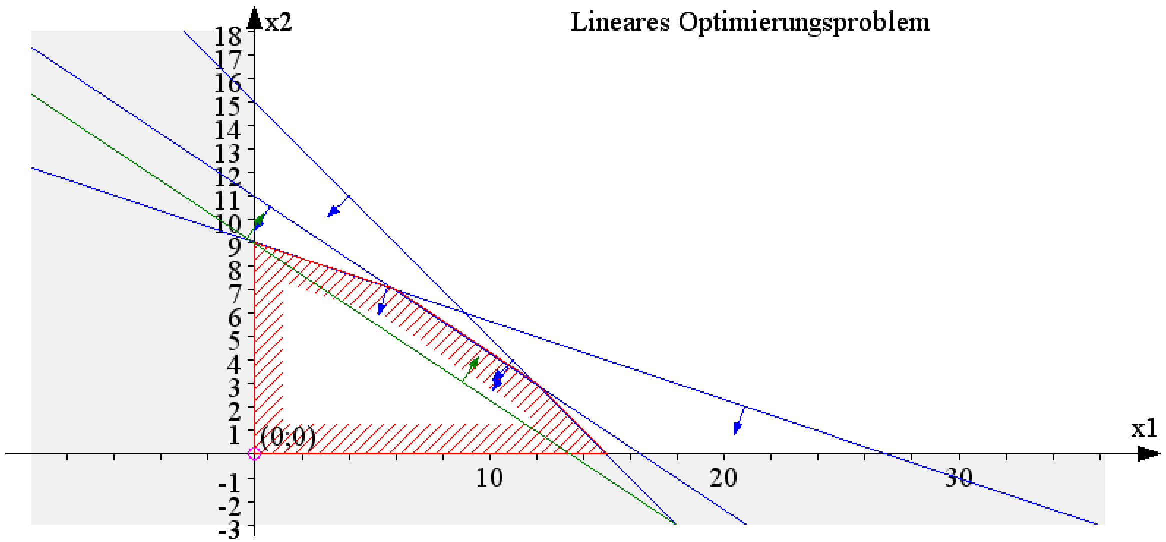
$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 15$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 15$$

$$x_1 + 3x_2 = 27$$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 9$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 27$$



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgender **Eckpunkte** (Sie werden bestimmt durch die Lösung eines entsprechenden linearen Gleichungssystems):

$$P_0(0,0),\ P_1(0,11),\ P_3(6,7),\ P_4(12,3)\ ,\ P_5(15,0)$$

Wir rechnen nun die Zielfunktionswerte für die Eckpunkte:

$$P_0(0,0), \qquad z_0 = 0$$

$$P_1(0,9), \qquad z_1 = 162$$

$$P_2(6,7), \qquad z_3 = 198$$

$$P_5(12,3), \qquad z_4 = 198$$

$$P_5(15,0), \qquad z_5 = 180$$

Damit haben wir zwei optimale Eckpunkte (Basislösungen):

$$x_1^* = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ und } \quad x_2^* = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

mit dem maximalen Gewinn von 198 GE.

Nun haben wir aber folgenden Satz der linearen Optimierung:

Hat ein lineares Optimierungsproblem zwei optimale Eckpunkte (Basislösungen), so hat es unendlich viele Optimallösungen. Diese liegen auf der Verbindungsstrecke zwischen den beiden optimalen Eckpunkten und können durch folgende Vorschrift ermittelt werden:

$$x^* = \alpha x^{*1} + (1-\alpha) x^{*2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Sucht man z.B. eine dritte Optimallösung, so setzt man einen Wert für α zwischen 0 und 1 in die obere Formel ein und berechnet sie.

Damit hat unser Problem eine **mehrdeutige Optimallösung**.

Lösung:

$x_1 + 3x_2 = 12$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 4$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 12$$

$x_1 + 2x_2 = 10$

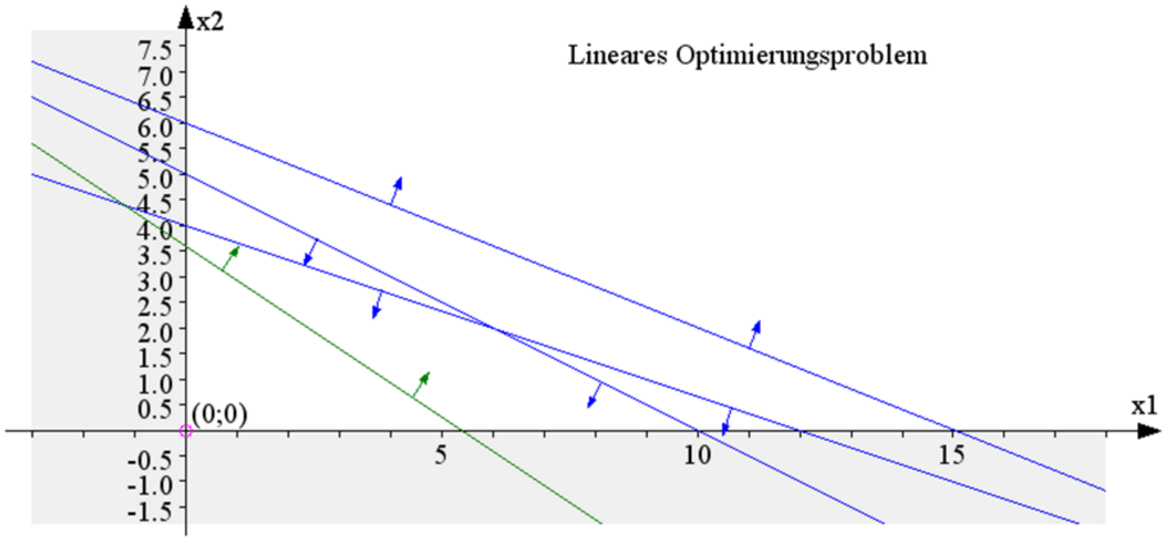
$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 5$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 10$$

$2x_1 + 5x_2 = 30$

$$x_1 := 0 \quad \Rightarrow x_2 = 6$$

$$x_2 := 0 \quad \Rightarrow x_1 = 15$$



Wir stellen fest, dass, dass die Menge der zulässigen Lösungen eine leere Menge ist, d.h. das Problem hat keine zulässige und damit auch keine Optimallösung

Wir gehen gleich vom folgenden Modell aus:

$$
\begin{aligned}
z &= 18x_1 + 6x_2 -> \max \\
-4x_1 \; + 3x_2 &\leq 6 \\
-x_1 \; + 3x_2 &\leq 15 \\
x_1 - 4\, x_2 &\leq 4 \\
x_1,\; x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Lösung:

Wir werden feststellen, dass dieses Modell leider keinen realen ökonomischen Hintergrund haben kann. Dafür sind nicht die negativen Koeffizienten im Nebenbedingungssystem verantwortlich. Zwar sind solche Koeffizienten in der Regel nicht negativ, aber es gibt auch solche Fälle. Z.B. wenn auf Grund chemischer Reaktionen, nicht nur material verbraucht wird, sondern auch gewisse Substanzen gewonnen werden.

$$-4x_1 + 3x_2 \le 6$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 \le 2$$

$$x_2 := 0 \quad x_1 \ge -\frac{3}{2}$$

$$-x_1 + 3x_2 \le 15$$

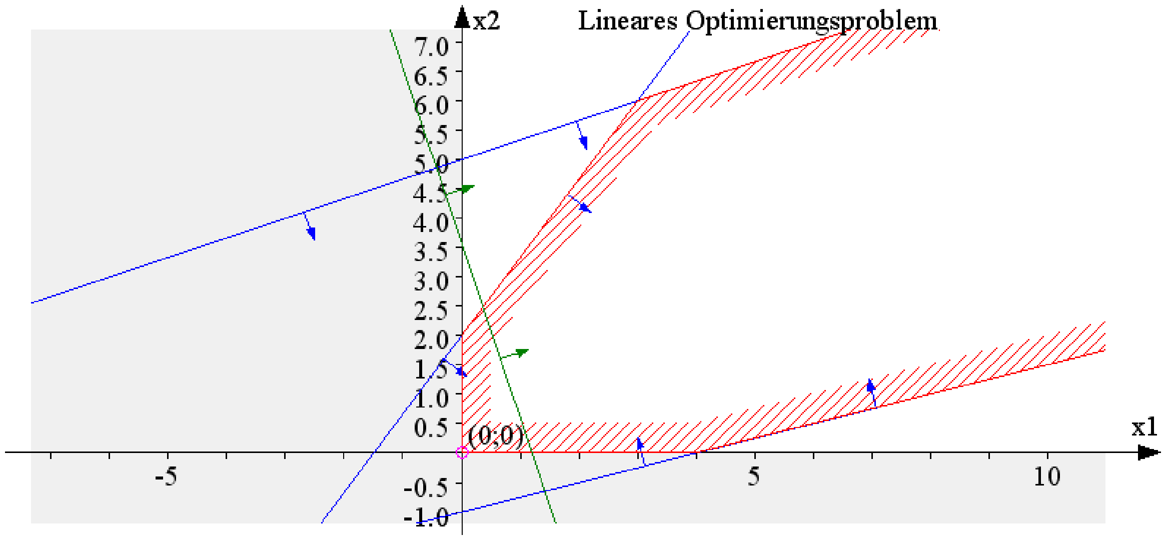
$$x_1 := 0 \quad x_2 \le 5$$

$$x_2 := 0 \quad x_1 \ge -15$$

$$x_1 - 4\,x_2 \le 4$$

$$x_1 := 0 \quad x_2 \ge -1$$

$$x_2 := 0 \quad x_1 \le 4$$



Verschiebt man nun die Zielfunktionsgerade (die grüne) nach oben, so erwischt man keinen Endpunkt und beleibt in der Menge der zulässigen Lösungen.

Damit ist die Zielfunktion auf der Menge der zulässigen Lösungen nach oben nicht beschränkt und die Aufgabe hat keine optimale Lösung. Leider, weil dies bedeuten würde, dass Ressourcen, entgegen der Realität, unbeschränkt zur Verfügung stehen.

Beispiel 5 (***Das Diätproblem***)

Die nachfolgende Tabelle zeigt wie viele Mengeneinheiten Eiweiß, Fett und Kohlenhydrate in 100 g zweier Nahrungsmittel N_1 und N_2 enthalten sind, den täglichen Mindestbedarf einer Person an diesen Nährstoffen und die Preise in Euro von 100 g der Nahrungsmittel N_1 und N_2:

	Nahrungsmittel		Täglicher
Nährstoffe	N_1	N_2	Mindestbedarf
Eiweiß	6	1	18
Fett	1	4	12
Kohlenhydrate	2	1	10
Preis (in €/100g)	20	40	

Es ist ein kostenminimaler Diätplan aufzustellen.

Lösung:

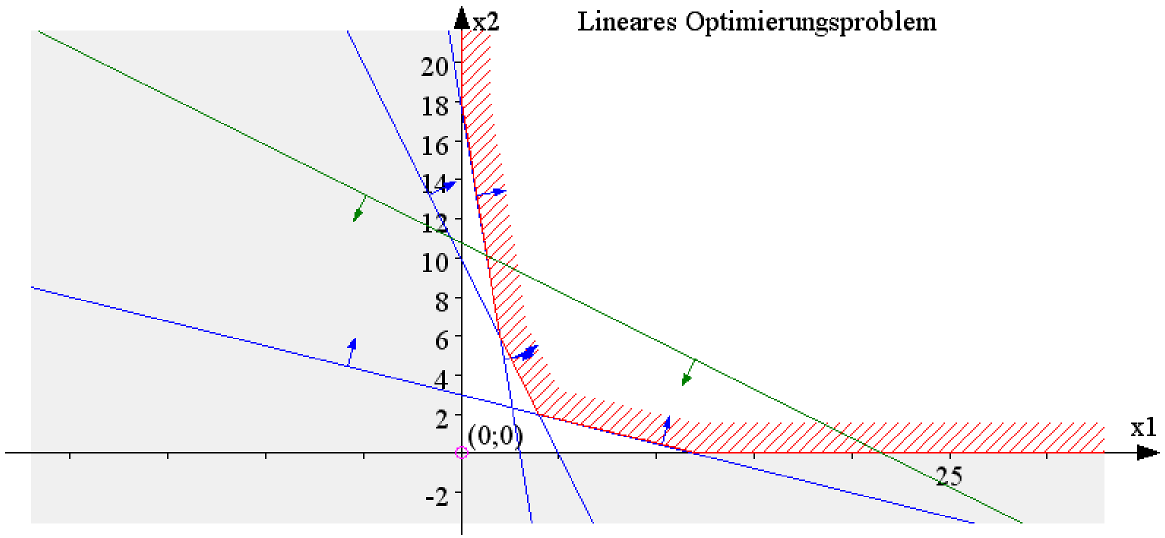
Sei

$x_i, i = 1, 2:$ Nahrungsmittelmenge N_i

Das Modell:

$$z = 20x_1 + 40x_2 -> \min$$

$$\begin{aligned} 6x_1 \quad + x_2 &\geq 18 \\ x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ 2\,x_1 + \quad x_2 &\geq 10 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Die Menge der zulässigen Lösungen hat folgende **Eckpunkte** (Sie werden bestimmt durch die Lösung eines entsprechenden linearen Gleichungssystems):

$$, P_1(0,18),\ P_2(2,8),\ P_3(4,2)\ ,\ P_4(12,0)$$

Wir rechnen nun die Zielfunktionswerte für die Eckpunkte:

$P_1(0,18)$, $\quad z_1 = 720$

$P_2(2,8)$, $\quad z_2 = 360$

$P_5(4,2)$, $\quad z_3 = 160$

$P_5(12,0)$, $\quad z_4 = 240$

$$x^* = (4,\ 2)^T, \qquad z^* = 160$$

Normalform

Eine lineare Optimierungsaufgabe liegt in der Normalform vor, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- **Die Zielfunktion ist zu maximieren.**
- **Alle Nebenbedingungen liegen in Gleichungsform vor.**
- **Alle Variablen sind nicht negativ.**

Das Modell:

$$z = 21x_1 + 24x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 33 \\ x_1 + x_2 &\leq 13 \\ 5x_1 + 8x_2 &\leq 80 \\ x_1,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Die Normalform:

$$z = 21x_1 + 24x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 33 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 \quad &= 13 \\ 5x_1 + 8x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 80 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5 & \end{aligned}$$

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 18x_2 &\rightarrow \max \\
x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\
2x_1 + 5x_2 &\geq 30 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 12x_1 + 18x_2 &\rightarrow \max \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 10 \\
2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 30 \\
x_i \geq 0,\ i &= 1,2,\ldots,5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z &= 12x_1 + 18x_2 \rightarrow \max \\
x_1 + 3x_2 &\le 12 \\
x_1 + 2x_2 &\le 10 \\
2x_1 + 5x_2 &\ge 30 \\
x_1,\ x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z &= 12x_1 + 18x_2 \rightarrow \max \\
x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 12 \\
x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 10 \\
2x_1 + 5x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 30 \\
x_i \ge 0,\ i &= 1,2,\ldots,5.
\end{aligned}
$$

Das Modell:

$$z = 20x_1 + 40x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned}
6x_1 + x_2 &\geq 18 \\
x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\
2x_1 + x_2 &\geq 10 \\
x_1,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Die Normalform:

$$z = -20x_1 - 40x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned}
6x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 18 \\
x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad &= 12 \\
2x_1 + x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 10 \\
x_i \geq 0,\ i = 1,2,\ldots,5.
\end{aligned}$$