Operationsforschung

1. Lineare Optimierung

Problemstellung:
Unter einem *linearen Optimierungsproblem* versteht man folgendes Problem:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to opt \qquad (\textit{Zielfunktion})$$

unter folgenden *Nebenbedingungen:*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le, \ =, \ \ge b_i, \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0, \qquad (\textit{Nichtnegativitätsbedingung})$$

Dabei sind:

$$c_j,\ a_{ij},\ b_i \in R^1,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n.$$

oder in der Matrizenschreibweise

$$opt\left\{z = c^T x \mid Ax < (>=) b, x \ge 0\right\}.$$

Hier sind:

$$c := (c_j),\ j = 1,2,\ldots,n$$
$$x := (x_j),\ j = 1,2,\ldots,n$$
$$A := (a_{ij}),\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$
$$b := (b_i),\ i = 1,2,\ldots,m.$$

Ein lineares Optimierungsproblem liegt in der Normalform vor, wenn es folgende Gestalt hat:

$$\max\left\{z = c^T x \mid Ax = b, x \ge 0\right\}.$$

Normalform:
Ein lineares Optimierungsproblem liegt in der Normalform vor, wenn es folgende Gestalt hat:

$$\max\left\{z = c^T x \mid Ax = b, x \ge 0\right\}.$$

Zulässige Lösung, Menge der zulässigen Lösungen

Betrachtet sei ein lineares Optimierungsproblem in Normalform. Ein Punkt $\bar{x}$ mit $\bar{x} \ge 0$, $A\bar{x} = b$ heißt *zulässige Lösung*. Die Menge

$$M = \{\bar{x} \mid A\bar{x} = b, \ \bar{x} \ge 0\}$$

heißt die *Menge der zulässigen Lösungen.*

Zulässige Basislösung

Eine zulässige Lösung $\bar{x}$ einer linearen Optimierungsaufgabe heißt eine *zulässige Basislösung*, wenn die Vektoren der Nebenbedingungen, die zu den positiven Komponenten von $\bar{x}$ gehören, linear unabhängig sind.

Basis der zulässigen Basislösung, Basisvariable, Nichtbasisvariable

Ein System von m linear unabhängigen Vektoren der Nebenbedingungen, dass alle Vektoren der Nebenbedingungen a_j enthält, für die $x_j > 0$ ist, heißt *Basis der zulässigen Basislösung*. Die den Basisvektoren entsprechenden Komponenten der zulässigen Basislösung heißen *Basisvariable*, die übrigen Komponenten *Nichtbasisvariable*.

Degenerierte und Nichtdegenerierte Basislösung

Sei r die Anzahl der positiven Elemente einer Basislösung. Is $r = m$, so heißt die Basislösung *nichtdegeneriert*. Im Falle $r < m$ heißt die Basislösung *degeneriert*.

Optimallösung

Eine zulässige Lösung x^* heißt *Optimallösung* eines linearen Optimierungsproblems, wenn

$$c^T x^* \geq c^T x, \ \forall x \in M.$$

Der Simplex- Algorithmus

Schritt1: Wähle eine Nichtbasisvariable, um sie zu einer Basisvariablen zu machen**.**

Die Nichtbasisvariable x_r wird durch folgende (Kann-)Regel gewählt:

$$z_r = \min_{j \in J} \left\{ z_j = c_B^T a^j - c_j \right\}, \ z_r < 0.$$

Dabei ist J die Menge der Indizes der Nichtbasisvariablen.

Sind alle $z_j \geq 0, \ j \in J$, dann stellt diese Basislösung eine Optimallösung dar**.**

Schritt 2: Wähle eine Basisvariable, um sie zu einer Nichtbasisvariablen zu machen**.**

Sei x_B^i die $i-te$ Komponente von x_B. Dann wird x_B^p nach folgender Regel gewählt:

$$\varepsilon = \frac{x_B^p}{a_{pr}} = \min \left\{ \frac{x_B^i}{a_{ir}} \mid a_{ir} > 0, \ i = 1, ..., m \right\}.$$

Gilt $a_{ir} < 0$ für alle $i = 1, 2, ..., m$**,** dann ist die Zielfunktion unbeschränkt auf der Menge der zulässigen Lösungen.

Schritt 3: Das Pivotelement heißt nun a_{pr}. Die Koeffizienten des alten Tableaus seien mit a_{ij} bezeichnet.

Die Koeffizienten des neuen Tableaus, bezeichnet mit $a_{ij}^{'}$, werden folgendermaßen berechnet:

$$a_{pj}^{'} = \frac{a_{pj}}{a_{pr}}, \quad b_{p}^{'} = \frac{b_p}{a_{pr}}$$

$$a_{ij}^{'} = a_{ij} - a_{ir}\frac{a_{pj}}{a_{pr}}, \quad b_{i}^{'} = b_i - a_{ir}\frac{b_p}{a_{pr}}, \quad i \neq p$$

$$z_{j}^{'} = z_j - z_r\frac{a_{pj}}{a_{pr}}, \quad f' = f - z_r\frac{b_p}{a_{pr}}.$$

Durch Wiederholung der Schritte 1 – 3 wird eine Optimallösung gefunden

2. Transportoptimierung

Vogelsche Approximationsmethode (VAM)- Der Algorithmus

1. Beachte für jede Reihe (Zeile und Spalte) des Transporttableaus die Differenz zwischen den beiden niedrigsten Transportkosten. Sind die minimalen Kosten nicht eindeutig, ist die Differenz gleich Null.

2. Wähle die (bzw. eine) Reihe mit der größten Differenz.

3. Belege in dieser Reihe das Feld mit den niedrigsten Kosten maximal.

4. Reduziere das Tableau um die entfallene Reihe und wiederhole das Verfahren solange bis die Gesamtkapazität (= Gesamtbedarf) vollständig verteilt ist.

Algorithmus der modifizierten Distributionsmethode

1. Ermittle eine zulässige Basislösung.

2. Berechne gemäß Satz S. 6. 6. Die Größen $u_i,\ i = 1,2,...m;\ j = 1,2,...,n.$

3. Ermittle für die NichtbasisFelder die Größen

   $$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j.$$

4. Gilt

   $$c_{ij}^{'} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j.$$

   so ist die Lösung optimal. Bestimme den optimalen Zielfunktionswert.

5. Gilt

$$c_{ij}^{'} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} < 0, \quad \text{für mindestens ein } (i, j),$$

so ermittle

$$c_{lk}^{'} = \underset{(i,j)}{Min}(c_{ij} - \bar{c}_{ij}) < 0.$$

Bilde ausgehend vom Feld (l,k) einen Zyklus. Kennzeichne die Ecken des Zyklus beginnend mit dem Feld (l,k) mit +, -,…,+.

6. Bestimme für die „Minus“-Felder die minimale Transportmenge. Addiere diese Größe zu den Transportmengen der „Plus“-Felder und subtrahiere sie von denen der „Minus“-Felder.

7. Gehe zurück zum Schritt 2.

Bemerkungen:

- Gilt für die optimale Lösung eines klassischen Transportproblems
  $$c_{ij}^{'} = c_{ij} - \bar{c}_{ij} = 0 \quad \text{für mindestens ein Nichtbasisfeld,}$$
  dann hat das Problem mindestens eine weitere Optimallösung. Diese erhält man indem man die entsprechende Variable zur Basisvariablen macht und einen weiteren Schritt rechnet. Seien x^{*1} und x^{*2} die dabei erhaltenen optimale Basislösungen. Dann stellt
  $$x^* = \alpha x^{*1} + (1-\alpha)x^{*2}, \quad 0 \le \alpha \le 1,$$
  alle Optimallösungen des klassischen Transportproblems dar.

- Ist die Anzahl der positiven Komponenten einer zulässigen Basislösung kleiner als $m+n-1$, so wird es nicht möglich sein, alle $u_i,\ i=1,2,...,m;\ v_j,\ j=1,2,...,n,$ zu bestimmen. In diesem Falle wird in mindestens ein *geeignetes* leeres Feld ein Null eingetragen und weiter gerechnet.

- Ein *offenes Transportproblem* liegt vor, wenn
  $$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$
  Ist
  $$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$
  so wird ein *fiktiver Verbraucher* (d.h. eine zusätzliche Spalte) eingeführt, wobei die entsprechenden Transportkosten/ME (falls keine weiteren Angaben bekannt sind) gleich Null gesetzt werden.
  Ist
  $$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

so wird ein *fiktiver Produzent* (d.h. eine zusätzliche Spalte) eingeführt, wobei die entsprechenden Transportkosten/ME (falls keine weiteren Angaben bekannt sind) gleich Null gesetzt werden.

3. Netzplantechnik (CPM/PERT)

CPM-Algorithmus

1. Auflisten der Aktivitäten
   Stelle eine Tabelle auf mit folgenden Informationen:

   - Bezeichnung der Aktivitäten und ihre Beschreibung
   - Festlegung der Vorgänger
   - Dauer der Aktivitäten

2. Aufstellen des Netzes
   Es gibt zwei mögliche Varianten:

   a. Vorgangspfeil-Netzplan (VPN)
      Hier werden die Aktivitäten durch Pfeile im Netz abgebildet und die Ereignisse durch Knoten

   b. Vorgangsknoten-Netzplan (VKN)
      Hier werden die Aktivitäten durch Knoten im Netz abgebildet und die logischen Kopplungen zwischen den Aktiven Vorgängen durch Pfeile.

3. Bestimmung des kritischen Weges

   Der *kritische Weg* stellt die kürzeste Zeit zur Durchführung des Projektes dar. Es handelt sich um den längsten Weg im Netz. *Kritische Aktivitäten* sind Aktivitäten, die auf dem kritischen Weg liegen.

   Sei

   T_i^f : der frühestmögliche Zeitpunkt zum Start der Aktivität $i \rightarrow j$

   T_j^f : der frühestmögliche Zeitpunkt zur Beendigung der Aktivität $i \rightarrow j$

   T_i^s : der spätestzulässige Zeitpunkt zum Start der Aktivität $i \rightarrow j$

   T_j^s : der spätestzulässige Zeitpunkt zur Beendigung der Aktivität $i \rightarrow j$

   t_{ij} : Dauer der Aktivität $i \rightarrow j$.

   Dann gilt:

$$T_0^f := 0$$
$$T_j^f = \max_i \left\{ T_i^f + t_{ij} \right\}, \quad i < j;\ j = 1, 2, ..., n;\ (P_i, P_j) \in K$$

$$T_n^s := T_n^f$$
$$T_i^s = \min_j \{T_j^s - t_{ij}\}, \quad i < j;\ i = n-1, n-2, ..., 0,\ (P_i, P_j) \in K.$$

Ein Weg ist *kritisch* dann und nur dann, wenn alle darauf liegende Aktivitäten folgender Bedingung genügen:

$$T_j^f - T_i^f - t_{ij} = 0.$$

4. Berechnung der Schlupfzeiten (Pufferzeiten)

Die *Schlupfzeit* ist die Zeitspanne zwischen frühestmöglichem und spätestzulässigem Eintreten eines Ereignisses:

$$T_i^s - T_i^f$$

Die wichtigsten Schlupfzeiten sind:

1) Gesamte Schlupfzeit

Die gesamte Schlupfzeit ist die Zeitspanne zwischen frühestmöglichem und spätestzulässigem Eintreten eines Ereignisses:

$$\Delta^G t_{ij} = T_j^s - T_i^f - t_{ij}$$

2) Freie Schlupfzeit

Die freie Schlupfzeit gibt den Anteil an der gesamten Schlupfzeit, wenn alle “Nachfolger” zu ihren frühestmöglichen Terminen beginnen:

$$\Delta^F t_{ij} = T_j^f - T_i^f - t_{ij}$$

3) Unabhängige Schlupfzeit

Die unabhängige Schlupfzeit gibt den Anteil an der freien Schlupfzeit, der verbleibt, wenn alle „Vorläufer“ zum spätestzulässigen Termin enden und alle „Nachfolger“ zum frühestmöglichen Termin beginnen:

$$\Delta^U t_{ij} = \max\{0,\ T_j^f - T_i^s - t_{ij}\}$$

4) Bedingte Schlupfzeit

Die bedingte Schlupfzeit ist der Restbetrag, der verbleibt, wenn von der gesamten Schlupfzeit, die freie Schlupfzeit abgezogen wird:

$$\Delta^B t_{ij} := \Delta^G t_{ij} - \Delta^F t_{ij}$$
$$= T_j^s - T_j^f$$

PERT-Algorithmus

1. Auflisten der Aktivitäten

Stelle eine Tabelle auf mit folgenden Informationen:

- Bezeichnung der Aktivitäten und ihre Beschreibung
- Festlegung der Vorgänger
- Drei Schätzungen für die Dauer einer Aktivität

i) *Die optimistische Schätzung*
Es ist hier die theoretisch kürzest mögliche Zeit anzunehmen. Sie wird sich nur dann ergeben, wenn praktische überhaupt keine Verlustzeiten auftreten. Sie wird nur selten realisiert. Die optimistischen Dauern seien mit $a_{ij},\ i,j = 1,2,...,n$, bezeichnet

ii) *Die Wahrscheinlichste Schätzung*
Es ist der Wert, für dessen Realisierung die maximale Wahrscheinlichkeit ergibt, also das Dichtemittel der Verteilung. Bei der Ermittlung dieser Zeiten rechnet man mit einem "normalen" Ablauf des Vorgangs. Es werden hier im üblichen Umfang Wartezeiten nicht berücksichtigt. Die wahrscheinlichsten Dauern seien mit $m_{ij},\ i,j = 1,2,...,n$, bezeichnet.

iii) *Die pessimistische Schätzung*
Bei der Ermittlung dieses Wertes wird angenommen, dass sich bei der Realisierung der Aktivität eine Häufung von Schwierigkeiten ergibt. Der sich durch Berücksichtigung dieser Widrigkeiten ergebene Wert soll so groß sein, dass er kaum zu übertreffen ist. Die pessimistischen Werte seien mit $b_{ij},\ i,j = 1,2,...,n,$ bezeichnet.

2. Aufstellen des Netzes

Siehe CPM-ALGORITHMUS

3. Berechnung der Erwartungswerte $\bar{t}_{ij}$ und der Standardabweichungen $\sigma_{t_{ij}}$

$$\bar{t}_{ij} = \frac{a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij}}{6}, \quad i,j = 1,2,...,n;\ (P_i, P_j) \in K$$

$$\sigma_{t_{ij}} = \frac{b_{ij} - a_{ij}}{6}, \quad i,j = 1,2,...,n;\ (P_i, P_j) \in K$$

4.Bestimmung des kritischen Weges

Sei

$\bar{T}_i^f$: der frühestmögliche Zeitpunkt zum Start der Aktivität $i \to j$

$\bar{T}_j^f$: der frühestmögliche Zeitpunkt zur Beendigung der Aktivität $i \to j$

$\sigma^2_{T_i^f}$: die Varianz der frühestmöglichen Start der Aktivität $i \to j$

$\sigma^2_{T_j^f}$: die Varianz der frühestmöglichen Zeit der Beendigung der Aktivität $i \to j$

$\bar{T}_i^s$: der frühestmögliche Start der Aktivität $i \to j$

$\bar{T}_j^s$: die spätestzulässige Zeit der Beendigung der Aktivität $i \to j$

$\sigma^2_{T_i^s}$: die Varianz der spätestzulässigen Start der Aktivität $i \to j$

$\sigma^2_{T_j^s}$: die Varianz der spätestzulässigen Zeit der Beendigung der Aktivität $i \to j$

t_{ij} : Dauer der Aktivität $i \to j$

Dann gilt:

$$\bar{T}_0^f := 0,$$

$$\bar{T}_j^f = \max_i \{\bar{T}_i^f + \bar{t}_{ij}\},\ i < j;\ j = 1,2,...,n;\ (P_i, P_j) \in K,$$

$$\sigma^2_{T_0^f} := 0,$$

$$\sigma^2_{T_j^f} = \max_i \{\sigma^2_{T_i^f} + \sigma^2_{t_{ij}}\},\ i < j;\ j = 1,2,...,n;\ (P_i, P_j) \in K.$$

$$\bar{T}_n^s := \bar{T}_n^f,$$

$$\bar{T}_i^s = \min_j \{\bar{T}_j^s - \bar{t}_{ij}\},\ i < j;\ i = n-1,\ n-2,...0;\ (P_i, P_j) \in K.$$

$$\sigma^2_{T_n^s} := 0,$$

$$\sigma^2_{T_i^s} = \max_j \{\sigma^2_{T_j^s} + \sigma^2_{t_{ij}}\},\ i < j;\ i = n-1,\ n-2,...0;\ (P_i, P_j) \in K.$$

5. Berechnung gewisser Wahrscheinlichkeiten.

4. Entscheidungstheorie (nur Präskriptiver)

Einteilung der Entscheidungsprobleme

Bezüglich der *Kenntnisse über die Zustände* werden folgende Entscheidungsprobleme definiert:

(1) *Entscheidung unter Sicherheit*
Die eintretenden Zustände sind bekannt

(2) *Entscheidung unter Ungewissheit*
Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Zustände sind nicht bekannt. Daher werden sie als gleich wahrscheinlich angenommen.

(3) *Entscheidung unter Risiko*
Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Zustände sind bekannt.

Regeln der Entscheidung unter Ungewissheit:

Wähle die Alternative a_k, so dass folgende Regel gilt:

Laplace-Regel:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{kj} = \max_{i=1,2,\ldots,m} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} .$$

Maximin-Regel/Wald:

$$Z_k = \max_{i=1,2,\ldots,m} Z_i := \max_i \min_j x_{ij}$$

Minimax-Regel:

$$w_{kj} = \min_i \max_j w_{ij} ,$$

mit

$$w_{ij} := \max_{i,j} x_{ij} - x_{ij} .$$

***Maximax-Regel*:**

$$x_{kj} = \max_i \max_j x_{ij} .$$

***Savage-Niehans-Regel*:**

$$x_{kj} = \min_i \max_j r_{ij} ,$$

mit

$$r_{ij} = \max_i x_{ij} - x_{ij} .$$

***Pessimismus-Optimismus-Regel/Hurwicz*:**

$$x_{kj} = \max_i \left\{ \alpha \cdot \max_j x_{ij} + (1-\alpha) \min_j x_{ij} \right\},$$

$$0 \leq \alpha \leq 1 .$$

Dabei sind:

α: Optimismusfaktor

$1-\alpha$: Pessimismusfaktor.

Regeln der Entscheidung unter Risiko:

1. Die μ-Regel/Bayes
2. Die "Bernoulli"-Regel (bzw. das „Bernoulli"-Prinzip)
3. Die $\mu - \sigma$-Regel

Wähle die Alternative a_k, so dass folgende Regel gilt:

***μ-Regel/Bayes*:**

$$E_k = \max_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \cdot p(z_j) .$$

$p(z_j)$: die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von z_j,

E_k: der Erwartungswert von a_k.

***Die Bernoulli-Regel*:**

$$E_k = \max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\left(x_{ij}\right) \cdot p(z_j) .$$

Dabei ist

$u_{ij}\left(x_{ij}\right),\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n$: die *Nutzenfunktion* (bzw. *Risiko-Nutzen-Funktion*) von x_{ij}.

Die Nutzenfunktion gibt die Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers wieder:

$$u''(x) \begin{cases} < 0 & \text{Risikoscheu} \\ = 0 & \text{Risikoneutral} \\ > 0 & \text{Risikofreudig} \end{cases}$$

$(\mu - \sigma)$ ***– Regel*:**

$$\Phi_k = \max_i \Phi(\mu_i, \sigma_i).$$

Hier ist $\Phi(\mu, \sigma)$ eine Präferenzfunktion.

Präferenzfunktion gibt die Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers wieder:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \begin{cases} < 0 & \text{Risikoscheu} \\ = 0 & \text{Risikoneutrall} \\ > 0 & \text{Risikofreudig} \end{cases}$$