Entscheidungstheorie

Lösungen

1.
1)

$$A := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

a_1 : Sparkonto 10000,00 €
a_2 : Beteiligung U1: 10000,00 €
a_3 : Beteiligung U2: 5000.00 und Sparkonto 5000.00 €
a_4 : Beteiligung U3: 3000.00 und Sparkonto 7000.00 €
a_5 : Beteiligung U2: 5000.00 € ,
Beteiligung U3: 3000.00 € und Sparkonto 2000.00 €.

2)

$$A_{erw} := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$$

a_i, $i = 1, 2, ..., 5$: wie oben
a_6 : Beteiligung U2: 2mal 5000,00 €
a_7 : Beteiligung U3: 2mal 3000,00 € und Sparkonto 4000.00 €
a_8 : Beteiligung U3: 3mal 3000.00 € und Sparkonto 1000.00 € ,

2.
Sei $x_i, i = 1, 2, 3$: die Produktionsmenge P_i.

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 2x_1 + x_2 + 0.5x_3 \leq 2000,\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3200,\ x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 8000;\ x_1,\ x_2, x_3 \geq 0\}$$

3.
a)
Es gilt

Umsatz = Preis * Menge
Gewinn = Umsatz – Kosten
Rendite = Gewinn / Kapitaleinsatz

Somit ergibt sich:

x (Tsd Stück)	30	40	50	60
A: Umsatz (Tsd. Stück)	165	200	225	240
B: Gewinn (Tsd €)	85	110	125	130
C: Rentabilität	21.25	25	25	24.53

b)
Umsatz und Gewinn sind in dem gesamten Bereich komplementär; sie nehmen im gesamten Bereich zu. Die Rentabilität ist im Bereich 30000 bis 40000 zu den anderen beiden Zielen komplementär, Von 40000 bis 50000 steht die Rentabilität den anderen Zielen neutral gegenüber. Von 50000 bis 60000 ist sie konkurrierend zu den anderen beiden Zielen.

4.
a_2 ist optimal bezüglich z_2.

5.
a)
Es handelt sich um eine Entscheidungssituation unter Ungewissheit, denn es liegen keine Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Zustände vor.

b)
Ineffiziente Alternativen werden von anderen Alternativen dominiert. In diesem Fall wird die Alternative a_2 von der Alternative a_3 und die Alternative a_4 von der Alternative a_1 dominiert.
Nachfolgende sind die beiden ineffizienten Alternativen fett hervorgehoben:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	2	6	2	6	6	6
a_2	**-24**	**2**	**4**	**-10**	**-20**	**12**
a_3	-20	20	10	-10	-20	20
a_4	**0**	**4**	**2**	**6**	**4**	**0**
a_5	18	10	6	4	-2	-6

Nach Eliminierung der ineffizienten Alternativen verbleibt also folgende Entscheidungssituation:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	$\frac{1}{n}\sum_j e_{ij}$
a_1	2	6	2	6	6	6	28/6
a_3	-20	20	10	-10	-20	20	0/6
a_5	18	10	6	4	-2	-6	30/6

c)
a_5 ist optimal.

6.
a)

$$i=1: \quad \sum_{j=1}^{3} z_{ij} = 50+60+70, \qquad \bar{x}=60$$

$$i=2: \quad \sum_{j=1}^{3} z_{ij} = 60+60+60, \qquad \bar{x}=60$$

Beide Alternativen sind nach der Laplace-Regel gleichwertig.

b)
a_1 wird von einem risikofreudigen Entscheidungsträger gewählt, a_2 von einem risikoscheuen.

7.
a)

$$\alpha = 0.6$$

z_{ij}	b_1	b_2	b_3	$\alpha \cdot \min_j z_{ij} + (1-\alpha) \max_j z_{ij}$
a_1	110	115	130	$110 \cdot 0.6 + 130 \cdot 0.4 = 118$
a_2	118	118	118	$118 \cdot 0.6 + 118 \cdot 0.4 = 118$

$$a_1 \sim a_2$$

b)

a_1, wenn risikofreudig

a_2, wenn risikoscheu

8.

r_{ij}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\max_j r_{ij}$
a_1	30	80	60	120	120
a_2	40	10	0	120	120
a_3	0	0	150	0	150

$$\min(120;120;120) = 120$$

$a_1 \sim a_2$

9.

	b_1	b_2	b_3	Minimax	Maximax	*Hurwicz* ($\alpha = 0.7$)	*Savage-Niehans*	*Laplace*
a_1	18	30	0	0	30	9.5	10	16.00
a_2	5	20	8	5	20	9.5	20	11.00
a_3	25	0	10	0	25	7.5	30	11.67
Optimale Alternative				a_2	a_1	a_2	a_1	a_1

10.

		0	1	2	3	4			
		b_1	b_1	b_1	b_1	b_1	Min	Max	$\alpha = 0.7$
0	a_1	0	0	0	0	0	0	0	0.0
1	a_2	-6	2	2	2	2	-6	2	-3.6
2	a_3	-12	-4	4	4	4	-12	4	-7.2
3	a_4	-18	-2	6	6	6	-18	6	-10.8
4	a_5	-24	-16	0	0	8	-24	8	-14.4

(1) a_1 (0.00 €)

(2) a_5 (8.00 €)

(3) a_1 (0.00 €)

(4) a_2 (0.40 €) ($\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0.4$, $\bar{x}_3 = -0.8$, $\bar{x}_4 = -0.4$, $\bar{x}_5 = -6.4$)

11.

a)

a_2 dominiert a_4, d.h. a_4 wird weiter nicht betrachtet.

b)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	*Min*	*Max*	$0.6 \cdot \underset{j}{Min}\, z_{ij} + 0.4 \cdot \underset{j}{Max}\, z_{ij}$
a_1	30	20	30	40	30	20	40	28
a_2	30	60	50	-10	100	-10	100	2
a_3	10	20	150	20	20	10	150	66
a_5	0	10	80	20	90	0	80	32
a_6	40	20	0	40	40	-40	40	8

Minimax: a_1 (20)
Maximax: a_3 (150)
Hurwicz: a_3 (66)
Laplace: a_2 (20) ($\bar{x}_1 = 50$, $\bar{x}_2 = 46$, $\bar{x}_3 = 44$, $\bar{x}_5 = 40$, $\bar{x}_6 = 12$)

12.

	$b_1(0.25)$	$b_2(0.25)$	$b_3(0.5)$	m_i	s_i	Φ_i
a_1	18	30	0	12.00	12.7279	11.36
a_2	5	20	8	10.25	5.7609	9.96
a_3	25	0	10	11.25	8.9268	10.80

1.

a_1 wird gewählt.

2.

a_1 wird gewählt.

13.

1.

$$m(a_4) = \frac{1}{5} z_{44}; \quad s^2(a_4) = \frac{z_{44}^2}{5} - \frac{1}{25} z_{44}^2 = 4; \qquad z_{44} = \pm 5$$

2.

$$m(a_4) = \pm 1$$

3.

$$m(a_1) = 0, \quad m(a_2) = 3, \quad m(a_3) = -1$$

4.

$$s^2(a_1) = 200, \qquad s(a_1) = 14.14$$

$$s^2(a_2) = 136, \qquad s(a_2) = 11.66$$

$$s^2(a_3) = 35.60, \qquad s(a_3) = 5.97$$

5.

a_2 wird gewählt.

6.

a_2 wird gewählt.

14.

z_{ij}	$b_1(0.5)$	$b_2(0.25)$	$b_3(0.25)$	m_i	s_i	Φ_i
a_1	0	100	100	**50.0**	50.00	33.333
a_2	36	49	25	36.5	8.50	**33.666**
a_3	16	64	36	33.0	19.67	26.444

1.

a_1 wird gewählt.

2.

a_2 wird gewählt.

3.

u_{ij}	$b_1(0.5)$	$b_2(0.25)$	$b_3(0.25)$	m_i
a_1	0	10	10	5.0
a_2	6	7	5	**6.0**
a_3	4	8	6	5.5

a_2 wird gewählt.

15.

1.

$m_1 = 25.5, \quad m_2 = 30.5, \quad m_3 = 32.0$

Die Produktion der Serie Hockenheim wird präferiert.

2.

Risikoneutralität

3.

u_{ij}	Großes Wirtschaftswachstum	Kleines Wirtschaftswachstum	Stagnation	m_i
	$p = 0.2$	$p = 0.5$	$p = 0.3$	
Avus	112	52	14.5	52.75
Monaco	88	72	62.5	72.35
Hockenheim	28	72	100.0	71.60

Die Produktion von Monaco wird geliefert.

16.

Investition 1:

$$E(u(x)) = 0.5 \cdot (2 \cdot 30000 - \frac{30000^2}{100000}) + 0.5 \cdot (2 \cdot 50000 - \frac{50000^2}{100000}) = 63000$$

Investition 2:

$$E(u(x)) = 0.5 \cdot (2 \cdot 10000 - \frac{10000^2}{100000}) + 0.5 \cdot (2 \cdot 80000 - \frac{80000^2}{100000}) = 57500$$

Der Unternehmer wird sich somit für Investition 1 entscheiden.

17.

1.

$$E(G) = m = 0.25 \cdot 0.60 + 0.5 \cdot 120 + 0.25 \cdot 360 = 165 \text{ €}$$

2.

$$E(U(G)) = 0.25 \cdot (-0.02 \cdot 60^2 + 10 \cdot 60) + 0.5 \cdot (-0.02 \cdot 120^2 + 10 \cdot 120)$$
$$+ 0.25 \cdot (-0.02 \cdot 360^2 + 10 \cdot 360) = 840$$

3.

$$840 = -0.02s^2 + 10s\,; \qquad s = 106.82\,; \qquad m = 165 > 106.82 = s$$

Der Entscheidungsträger ist also risikoscheu.

18.

$$m = 0.3 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 10 + 0.3 \cdot 13 = 10 \text{ Mio. €}$$

1.
Der Erwartungswert entspricht also gerade dem Kaufpreis von 10 Mio. €. Der Verkäufer ist vor dem Verkauf der Besitzer des Aktienpakets, danach besitzt er die 10 Mio. €. Wenn er einen Nutzen aus diesem Geschäft zieht, so muss ihm das Aktienpaket weniger als 10 Mio. € Wert gewesen sein. Der sichere Wert, den er mit dem Aktienpaket als gleichwertig betrachtet, ist sein Sicherheitsäquivalent. Das Sicherheitsäquivalent des Verkäufers muss also niedriger als 10 Mio. € sein.
Der Käufer wertet den Kauf positiv, wenn der sichere Wert, den er dem Aktienpaket beimisst, größer als der Kaufpreis ist. Das Sicherheitsäquivalent des Käufers muss also größer als 10 Mio. € sein.

2.
Es sei unterstellt, dass der Kaufabschluss nur zustande kommt, wenn beide Parteien einen Vorteil daraus ziehen. Das Sicherheitsäquivalent des Verkäufers ist dann niedriger als 10 Mio. €, also niedriger als der Erwartungswert. Daher ist der Verkäufer risikoscheu. Das Sicherheitsäquivalent des Käufers ist größer als der Erwartungswert, daher ist der Käufer risikofreudig.

19.
1.

u_{ij}	$b_1(0.35)$	$b_2(0.30)$	$b_3(0.20)$	$b_4(0.05)$	$b_5(0.10)$	$E(u)$
a_1	141	21	0	92	0.2	60.27
a_2	2.40	166.79	0	0	127	63.58
a_3	57.9	99	6.60	207.35	12.80	62.83

a_2 wird gewählt.

2.

$$u(z) := \begin{cases} z^2 - 0.8z & \text{für} \quad 0 \le z \le 10 \\ 7z + 22 & \text{für} \quad 10 < z \le 19 \\ 35.56 z^{\frac{1}{2}} & \text{für} \quad 19 < z \end{cases}$$

Die Funktion $u(z)$ ist für

$0 \le u \le 10$	konvex	$\Rightarrow$	Risikofreude
$10 < u \le 19$	sowohl konvex als auch konkav	$\Rightarrow$	Risikoneutralität
$10 < u$	konkav	$\Rightarrow$	Risikoscheue

20.
1.

$$m(a_1) = \frac{1}{4}(80 + 50 + 40 + 30) = 50$$

$$m(a_2) = \frac{1}{4}(60 + 70 + 20 + 80) = 57.5$$

$$m(a_3) = \frac{1}{4}(40 + 30 + 80 + 60) = 50$$

$$m(a_4) = \frac{1}{4}(20 + 10 + 70 + 90) = 47.5$$

a_2 wird gewählt.

2.

$$IW := EI - E$$
$$EI = 0.25 \cdot 80 + 0.25 \cdot 70 + 0.25 \cdot 80 + 0.25 \cdot 90 = 80$$
$$IW := 80 - 57.5 = 22.5$$

3.

$$p(I_1) = 0.5 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.25 + 0.0 \cdot 0.25 = 0.25$$
$$p(I_2) = 0.5 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.25 + 0.0 \cdot 0.25 = 0.25$$
$$p(I_3) = 0.0 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.25 + 0.8 \cdot 0.25 + 1.0 \cdot 0.25 = 0.50$$

$$p(b_1 / I_1) = \frac{0.5 \cdot 0.25}{0.25} = 0.5, \quad p(b_1 / I_2) = \frac{0.5 \cdot 0.25}{0.25} = 0.5, \quad p(b_1 / I_3) = \frac{0.0 \cdot 0.25}{0.5} = 0.0$$
$$p(b_2 / I_1) = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.25} = 0.4, \quad p(b_2 / I_2) = \frac{0.4 \cdot 0.25}{0.25} = 0.4, \quad p(b_2 / I_3) = \frac{0.2 \cdot 0.25}{0.5} = 0.1$$
$$p(b_3 / I_1) = \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.25} = 0.1, \quad p(b_3 / I_2) = \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.25} = 0.1, \quad p(b_3 / I_3) = \frac{0.8 \cdot 0.25}{0.5} = 0.4$$
$$p(b_4 / I_1) = \frac{0.0 \cdot 0.25}{0.25} = 0.0, \quad p(b_4 / I_2) = \frac{0.0 \cdot 0.25}{0.25} = 0.0, \quad p(b_4 / I_3) = \frac{1.0 \cdot 0.25}{0.5} = 0.5$$

I_1	0.5	0.4	0.1	0.0	$m(I_1)$
a_1	80	50	40	30	**64**
a_2	60	70	20	80	60
a_3	40	30	80	60	40
a_4	20	10	70	90	21

I_2	0.5	0.4	0.1	0.0	$m(I_1)$
a_1	80	50	40	30	**64**
a_2	60	70	20	80	60
a_3	40	30	80	60	40
a_4	20	10	70	90	21

I_3	0.0	0.1	0.4	0.5	$m(I_1)$
a_1	80	50	40	30	36
a_2	60	70	20	80	55
a_3	40	30	80	60	65
a_4	20	10	70	90	**74**

$EI = 0.25 \cdot 64 + 0.25 \cdot 64 + 0.5 \cdot 74 = 69$

$IW = 69 - 57.5 = 11.5$

21.
Der Spieler B wird seine Strategien b_2 und b_5 nicht spielen, da sie von b_1 dominiert werden. Er wird ferner auf b_3 verzichten, da diese Strategie schlechter ist als b_4 :

	b_1	b_4
a_1	3	6
a_2	4	2
a_3	1	5

Der Spieler A wird auf a_3 verzichten, da diese von a_1 dominiert wird:

	b_1	b_4
a_1	3	6
a_2	4	2

22.
1.

	b_1	b_2	$\boldsymbol{a}_i$
a_1	3	4	**3**
a_2	1	-5	-5
$\boldsymbol{b}_j$	**3**	4	

$\boldsymbol{a} = 3 = \boldsymbol{b}$

Es handelt sich um ein Spiel mit Sattelpunkt. Spieler A sollte die Strategie a_1 wählen, Spieler B die Strategie b_1. Das Spiel hat den Wert 3, ist nicht gerecht.

2.

	b_1	b_2	b_3	$\boldsymbol{a}_i$
a_1	2	-4	-3	-4
a_2	0	5	3	**0**

$\boldsymbol{b}_j$	**2**	5	3	

$\boldsymbol{a} = 0 \neq 2 = \boldsymbol{b}$.

Es handelt sich um ein Spiel ohne Sattelpunkt.

3.

	b_1	b_2	$\boldsymbol{a}_i$
a_1	-2	1	-2
a_2	0	3	**0**
$\boldsymbol{b}_j$	**0**	3	

$\boldsymbol{a} = 0 = \boldsymbol{b}$

Es handelt sich um ein Spiel mit Sattelpunkt. Spieler A sollte die Strategie a_2 wählen, Spieler B die Strategie b_1. Das Spiel hat den Wert 0, ist also gerecht.

4.

	b_1	b_2	$\boldsymbol{a}_i$
a_1	0	1	0
a_2	2	1	**1**
a_3	-1	0	-1
$\boldsymbol{b}_j$	2	**1**	

$\boldsymbol{a} = 1 = \boldsymbol{b}$

Es handelt sich um ein Spiel mit Sattelpunkt. Spieler A sollte die Strategie a_2 wählen, Spieler B die Strategie b_2. Das Spiel hat den Wert 1.

5.

	b_1	b_2	$\boldsymbol{a}_i$
a_1	0	0	**0**
a_2	0	0	**0**
$\boldsymbol{b}_j$	**0**	**0**	

$\boldsymbol{a} = 0 = \boldsymbol{b}$

Es handelt sich um ein Spiel mit Sattelpunkt. Spieler A und B können jede der Ihnen zur Verfügung stehenden Strategien wählen. Das Spiel hat den Wert 0, ist also gerecht.

23.

1.

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \qquad w = \frac{7}{3}.$$

2.

Die Strategie b_4 wird von b_1 dominiert.

$$p = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} \frac{9}{14} & \frac{5}{14} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w = \frac{1}{7}.$$

3.

Die Strategie a_1 wird von a_2 dominiert, man kann sie also weglassen.

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

q ist *nicht* eindeutig. Optimale Strategien sind z.B.

$$q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$w = \frac{5}{3}$$

4.

Die Strategie a_1 braucht man nicht zu berücksichtigen, da sie von a_3 dominiert wird.

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \qquad w = \frac{7}{5}$$

(Last updated: 16.01.07)