# Kapitel VI

# *Varianzanalyse*

**B. 6. 1. (*Gegenstand der Varianzanalyse*)**
Die Varianzanalyse ist ein sehr allgemeines Verfahren zur statistischen Bewertung von Mittelwertunterschieden zwischen mehr als zwei Gruppen.

**B. 6. 2. (*Faktoren, Faktorstufen*)**
Unabhängige Variablen werden im Zusammenhang mit der Varianzanalyse als *Faktoren* bezeichnet. Es handelt sich dabei immer um qualitative, nominalskalierte Variablen. Die einzelnen qualitativen Ausprägungen eines Faktors werden als *Faktorstufen* bezeichnet.
Im Gegensatz zu den Faktoren handelt es sich bei den in einer Varianzanalyse betrachteten *abhängigen Variablen* stets um quantitative, intervallskalierte Variablen.

**B. 6. 3. (*Klassifikation der Modelle der Varianzanalyse*)**

| | Anzahl der unabhängigen Variablen | |
|---|---|---|
| Anzahl der abhängigen Variablen | 1 | >1 |
| 1 | Einfaktorielle univariate Varianzanalyse | Mehrfaktorielle univariate Varianzanalyse |
| >1 | Einfaktorielle multivariate Varianzanalyse | Mehrfaktorielle multivariate Varianzanalyse |

**B. 6. 4 (*Gegenstand der einfaktoriellen Varianzanalyse* )**
Die *Varianzanalyse* (*ANOVA = ANalysis Of VAriance*) wird benutzt, um Unterschiede zwischen Mittelwerten von drei oder mehr Stichproben auf Signifikanz zu prüfen.
Der entsprechende Test basiert auf folgenden Hypothesen:

$$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$
$$H_1: \ \mu_i \neq \mu_j, \ \text{ für mindestens ein } i \neq j, \ i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

$$k \geq 3.$$

Die einfaktorielle Varianzanalyse basiert auf folgenden Annahmen:

1. Die Populationen, aus denen die Stichproben stammen, sind (näherungsweise) normal verteilt.
2. Die Populationen, aus denen die Stichproben stammen, haben die gleiche Varianz (oder Standardabweichung).
3. Die Stichproben sind zufällig und unabhängig voneinander.

**<u>ALG. 6. 1.</u> (*Test der Gleichheit von k Populationsmittelwerten*)**

*<u>Schritt 1</u> (Formulierung der Hypothesen)*

$H_0: \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k$; $H_1: \mu_i \neq \mu_j$, für mindestens ein $i \neq j$, $i, j = 1, 2, ..., k$, $k \geq 3$.

*<u>Schritt 2</u> (Berechnung der Teststatistik)*

Sei

$x_{ij}$: Wert der Beobachtung $i$ für die Behandlung $j$
$n_j$: Anzahl der Beobachtungen für die Behandlung $j$
$\bar{x}_j$: Stichprobenmittelwert für die Behandlung $j$
$s_j^2$: Stichprobenvarianz für die Behandlung $j$
$s_j$: Standardabweichung der Stichprobe für die Behandlung.

$$F = \frac{MSTR}{MSE}$$

mit

$$MSTR := \frac{SSTR}{k-1}$$

(<u>*Within-Tratments*</u>: *<u>M</u>ean <u>S</u>quare due to <u>TR</u>ea<u>t</u>ment; <u>Between Treatments</u>: <u>M</u>ean <u>S</u>quare due to <u>E</u>rror)*

Geschätzte Varianz *innerhalb der Gruppen* (*within-Varianz, Fehlervarianz, „error“*):
Wie unterscheiden sich die einzelnen Werte in einer Stichprobe (oder Gruppe) von den übrigen Werten in der gleichen Gruppe?

Geschätzte Varianz *zwischen den Gruppen* (*between-Varianz*):Wie unterscheiden sich die Mittelwerte verschiedener Stichproben (oder Gruppen) voneinander?)

$$SSTR := \sum_{j=1}^{k} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$$ (*<u>S</u>um of <u>S</u>quares due to <u>T</u>rea<u>T</u>ments)*

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j}$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_T} \quad ; \quad n_T = n_1 + n_2 + \ldots + n_k. \quad (\textit{Gesamtstichprobenmittelwert})$$

(Haben alle Stichproben den gleichen Umfang $n$, dann ist $n_T = k \cdot n$ und damit

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{kn} = \frac{\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n}}{k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j}{k}.)$$

(Haben alle Stichproben den gleichen Umfang $n$, dann ist $n_T = k \cdot n$ und damit

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{kn} = \frac{\frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n}}{k} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \bar{x}_j}{k}.)$$

$$s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_j}(x_{ij} - \bar{x}_j)}{n_j - 1}$$

$$SSE = \sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)s_j^2 \qquad (\textit{\underline{S}um of \underline{S}quares due to \underline{E}rror})$$

$$MSE := \frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j - 1)s_j^2}{n_T - k} = \frac{SSE}{n_T - k} \quad (\textit{\underline{M}ean \underline{S}quare due to \underline{E}rror})$$

*<u>Schritt 3</u> (Entscheidung)*

$p-value-$Methode: Lehne $H_0$ ab, wenn $p-Value \le \alpha$

*Critical-Value*-Methode: Lehne $H_0$ ab, wenn $F \ge F_\alpha$

($F_\alpha$ basiert auf der $F-$Verteilung mit dem Freiheitsgrad $k-1$ im Zähler und dem Freiheitsgrad $n_T - k$ im Nenner.)

**<u>B. 6. 1.</u> *(Paarweiser Vergleich der Mittelwerte in der Grundgesamtheit)***

*<u>Schritt 1</u> (Formulierung der Hypothesen)*

$H_{0:}: \mu_i = \mu_j$ $\qquad\qquad$ $H_{1:}: \mu_i \neq \mu_j$

*<u>Schritt 2</u> (Berechnung der t-Statistik)*

$$t_{stat} = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}_j}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}}$$

*<u>Schritt 3</u> (Entscheidung)*

| | |
|---|---|
| $p - value -$ Methode: | Lehne $H_0$ ab, wenn $p - value \leq \alpha$ |
| *Critical-Value*-Methode: | Lehne $H_0$ ab, wenn $t \leq -t_{\alpha/2}$ oder $t \geq t_{\alpha/2}$ |

(Hinweis: Der entsprechende Freiheitsgrad ist $n_T - k$.)

**<u>B. 6. 2.</u> *(Konfidenzintervalle für die Mittelwerte in der Grundgesamtheit)***

$$\mu_j \in \left[\bar{x}_j - t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{MSE}}{n_j}, \bar{x}_j + t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sqrt{MSE}}{n_j}\right], \quad j = 1, 2, ..., k$$

(Hinweis: Der entsprechende Freiheitsgrad ist $n_T - k$)

**<u>BS. 6. 1.</u>**

Eine Firma stellt Drucker und Faxgeräte in drei verschiedenen Standorten $S_1, S_2$ und $S_3$ her. Um festzustellen, wie weit die Mitarbeiter über Qualitätsmanagement Bescheid wissen, werden jeweils 6 Mitarbeiter aus jedem Standort gewählt und getestet. Die Ergebnisse werden mit 0 -100 bewertet. Folgende Tabelle enthält die erhaltenen Resultate:

| Beobachtung | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 85 | 71 | 59 |
| 2 | 75 | 75 | 64 |
| 3 | 82 | 73 | 62 |
| 4 | 76 | 74 | 69 |
| 5 | 71 | 69 | 75 |
| 6 | 85 | 82 | 67 |

Dabei gehen wir von folgenden Annahmen aus:

- Für jede Population ist die abhängige Variable „Bewertung“ normalverteilt.
- In allen drei Populationen sind die Varianzen der Bewertungen gleich.
- Die Bewertung der Leistung jedes Mitarbeiters ist unabhängig von der Bewertung der Leistung jedes anderen Mitarbeiters.

Sei $\alpha := 0.01$

1. Zeigen Sie, dass die alle Mittelwerte in der Grundgesamtheit nicht gleich sind.
2. Untersuchen Sie, ob in der Grundgesamtheit die Mittelwerte paarweise gleich oder ungleich sind.
3. Bestimmen Sie ein Konfidenzintervall für jeden Mittelwert in der Grundgesamtheit.

1.

<u>Schritt1</u> *(Formulierung der Hypothesen)*

$H_0: \ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3; \ \ H_1: \ \mu_i \neq \mu_j,$ für mindestens ein $i \neq j, \ i, j = 1,2,3.$

<u>Schritt 2</u> *(Berechnung der Teststatistik)*

$$\bar{x}_1 = \frac{85+75+82+76+71+85}{6} = 79$$
$$\bar{x}_2 = \frac{71+75+73+74+69+82}{6} = 74$$
$$\bar{x}_3 = \frac{59+64+62+69+75+67}{6} = 66$$

$$s_1^2 = \frac{(85-79)^2+(75-79)^2+(82-79)^2+(76-79)^2+(71-79)^2+(85-79)^2}{5} = 34; \quad s_1 = 5.83$$
$$s_2^2 = \frac{(71-74)^2+(75-74)^2+(73-74)^2+(74-74)^2+(69-74)^2+(82-74)^2}{5} = 20; \quad s_2 = 4.47$$
$$s_3^2 = \frac{(59-66)^2+(64-66)^2+(62-66)^2+(69-66)^2+(75-66)^2+(67-66)^2}{5} = 32; \quad s_1 = 5.66$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{79+74+66}{3} = 73$$

$$SSTR := \sum_{j=1}^{k} n_j(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 6\left(79-73\right)^2 + 6\left(74-73\right)^2 + 6\left(66-73\right)^2 = 516$$

$$MSTR := \frac{SSTR}{k-1} = \frac{516}{3-1} = 258$$

$$SSE = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1)s_j^2 = (6-1)34 + (6-1)20 + (6-1)32 = 430$$

$$MSE = \frac{SSE}{n_r - k} = \frac{430}{18-3} = 28.67.$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{258}{28.67} = 9\,.$$

<u>Schritt 3</u> *(Entscheidung)*
Sei $\alpha = 0.01$.

Freiheitsgrad des Zählers: $k-1=3-1=2$,
Freiheitsgrad des Nenners: $n_T - k = 18-3 = 15$.

$$F_{0.01}(df_1 = 2, df_2 = 15) = 6.36\,.$$

Wegen $F = 9 \geq 6.36 = F_{0.01}$ wird die Nullhypothese wird abgelehnt. Mit anderen Worten, die Varianzanalyse unterstützt die Vermutung, dass die Mittelwerte der Population nicht alle gleich sind.

2.

a)

<u>Schritt 1</u> *(Formulierung der Hypothesen)*

$H_{0:}:\ \mu_1 = \mu_2$ $\qquad$ $H_{1:}:\ \mu_1 \neq \mu_2$

<u>Schritt 2</u> *(Berechnung der t-Statistik)*

$$t_{stat} = \frac{79-74}{\sqrt{28.67 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)}} = 1.617$$

<u>Schritt 3</u> *(Entscheidung)*

$$t_{stat} = 1.617 < 2.947 = t_{krit}$$

Lehne $H_{0:}$ ab.

b)

<u>Schritt 1</u> *(Formulierung der Hypothesen)*

$H_{0:}:\ \mu_1 = \mu_3$ $\qquad$ $H_{1:}:\ \mu_1 \neq \mu_3$

<u>Schritt 2</u> *(Berechnung der t-Statistik)*

$$t_{stat} = \frac{79-66}{\sqrt{28.67 \cdot \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)}} = 4.205$$

<u>Schritt 3</u> *(Entscheidung)*

$$t_{stat} = 4.205 > 2.947 = t_{krit}$$

Lehne $H_{0:}$ ab.

c).

<u>Schritt 1</u> *(Formulierung der Hypothesen)*

$$H_{0:}: \ \mu_2 = \mu_3 \qquad\qquad H_1: \ \mu_2 \neq \mu_3$$

<u>Schritt 2</u> *(Berechnung der t-Statistik)*

$$t_{stat} = \frac{74-66}{\sqrt{28.67 \cdot \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)}} = 2.588$$

<u>Schritt 3</u> *(Entscheidung)*

$$t_{stat} = 2.588 < 2.947 = t_{krit}$$

Lehne $H_0$ nicht ab.

3.

$$\mu_1 \in \left[79 - 2.947 \cdot \frac{\sqrt{28.67}}{6}, 79 + 2.947 \cdot \frac{\sqrt{28.67}}{6}\right] = [76.370, 81.630]$$

$$\mu_2 \in \left[74 - 2.947 \cdot \frac{\sqrt{28.67}}{6}, 74 + 2.947 \cdot \frac{\sqrt{28.67}}{6}\right] = [71.370., 76.630]$$

$$\mu_3 \in \left[66 - 2.947 \cdot \frac{\sqrt{28.67}}{6}, 66 + 2.947 \cdot \frac{\sqrt{28.67}}{6}\right] = [63.370., 68.630]$$

Die *ANOVA-Tabelle* gibt eine Übersicht über die erzielten Resultate:

*ANOVA-Tabelle*

| Variationsgrund | Quadratsumme | Freiheitsgrad | Mittlere Quadratsumme | $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Behandlung | 516 | 2 | 280.00 | 9.00 |
| Fehler | 430 | 15 | 25.67 | |
| Gesamt | 940 | 17 | | |

*(Letzte Aktualisierung: 20.11.23)*