

# Kapitel VI

## Varianzanalyse

### Lösungen

#### A. Rechenaufgaben

1.

1.

Schritt 1 (Formulierung der Hypothesen)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, \quad H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ für mindestens ein } i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4$$

Schritt 2 (Berechnung der Teststatistik)

$$\bar{x}_1 = \frac{19+21+26+24+18}{5} = 21.6,$$

$$\bar{x}_2 = \frac{14+16+14+13+17+13}{6} = 14.5,$$

$$\bar{x}_3 = \frac{11+14+21+13+16+18}{6} = 15.5,$$

$$\bar{x}_4 = \frac{24+19+21+26+20}{5} = 22.0.$$

$$s_1^2 = \frac{(19-21.6)^2 + (21-21.6)^2 + (26-21.6)^2 + (24-21.6)^2 + (18-21.6)^2}{4} = \frac{45.2}{4} = 11.3$$

$$s_2^2 = \frac{(14-14.5)^2 + (16-14.5)^2 + (14-14.5)^2 + (13-14.5)^2 + (17-14.5)^2 + (13-14.5)^2}{5} = \frac{13.5}{5} = 2.7$$

$$s_3^2 = \frac{(11-15.5)^2 + (14-15.5)^2 + (21-15.5)^2 + (13-15.5)^2 + (16-15.5)^2 + (18-15.5)^2}{5} = \frac{65.5}{5} = 13.1$$

$$s_4^2 = \frac{(24-22.0)^2 + (19-22.0)^2 + (21-22.0)^2 + (26-22.0)^2 + (20-22.0)^2}{4} = \frac{34}{4} = 8.5$$

$$\bar{x} = \frac{21.6+14.5+15.5+22.0}{4} = 18.4$$

$$SSTR = 5 \cdot (21.6-18.4)^2 + 6 \cdot (14.5-18.4)^2 + 6 \cdot (15.5-18.4)^2 + 5 \cdot (22-18.4)^2 = 257.72$$

$$MSTR = \frac{257.72}{4-1} = 85.9067$$

$$SSE = (5-1) \cdot 11.3 + (6-1) \cdot 2.7 + (6-1) \cdot 13.1 + (5-1) \cdot 8.5 = 158.2$$

$$MSE = \frac{158.2}{22-4} = 8.7889$$

$$F = \frac{85.9067}{8.7889} \approx 9.77$$

### Schritt 3 (Entscheidung)

$$\alpha = 0.05.$$

$$\text{Freiheitsgrad des Zählers: } k - 1 = 4 - 1,$$

$$\text{Freiheitsgrad des Nenners } n_T - k = 22 - 4 = 18.$$

$$F_{0.05}(df_1 = 3; df_2 = 18) = 3.16.$$

Wegen  $F = 9.77 > 3.16 = F_{0.05}$  wird die Nullhypothese abgelehnt. Damit sind die Mittelwerte nicht sämtlich gleich.

2.

### Schritt 1:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

### Schritt 2:

$$t_{stat} = \frac{21.6 - 14.5}{\sqrt{8.7889 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)}} = 12.7456$$

### Schritt 3:

$$t_{stat} = 12.7456 > 2.101 = t_{krit}$$

Damit wird  $H_0$  abgelehnt.

3.

$$\mu_A = \left[ 21.6 - 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{5}, 21.6 + 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{5} \right] = [20.3543, 22.8457]$$

$$\mu_B = \left[ 14.5 - 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{6}, 14.5 + 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{6} \right] = [13.4619, 15.5381]$$

$$\mu_C = \left[ 15.5 - 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{6}, 15.5 + 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{6} \right] = [14.4619, 16.5381]$$

$$\mu_D = \left[ 22.0 - 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{5}, 22.0 + 2.101 \cdot \frac{\sqrt{8.7889}}{5} \right] = [20.7543, 23.2457]$$

2.

Schritt 1 (Formulierung der Hypothesen)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad H_1: \mu_i \neq \mu_j \text{ für mindestens ein } i \neq j, i, j = 1, 2, 3.$$

Schritt 2 (Berechnung der Teststatistik)

$$\bar{x}_1 = \frac{20 + 26 + 24 + 22}{4} = 23, \quad \bar{x}_2 = \frac{28 + 26 + 31 + 27}{4} = 28,$$

$$\bar{x}_3 = \frac{20 + 19 + 23 + 22}{4} = 21.$$

$$s_1^2 = \frac{(20 - 23)^2 + (26 - 23)^2 + (24 - 23)^2 + (22 - 23)^2}{3} = \frac{20}{3} \approx 6.67$$

$$s_2^2 = \frac{(28 - 28)^2 + (26 - 28)^2 + (31 - 28)^2 + (27 - 28)^2}{3} = \frac{14}{3} \approx 4.67$$

$$s_3^2 = \frac{(20 - 21)^2 + (19 - 21)^2 + (23 - 21)^2 + (22 - 21)^2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3.33$$

$$\bar{x} = \frac{23 + 28 + 21}{3} = 24$$

$$SSTR = 4 \cdot (23 - 24)^2 + 4 \cdot (28 - 24)^2 + 4 \cdot (21 - 24)^2 = 104$$

$$MSTR = \frac{104}{3-1} = 52$$

$$SSE = (4-1) \cdot 6.67 + (4-1) \cdot 4.67 + (4-1) \cdot 3.33 = 44.01$$

$$MSE = \frac{44.01}{12-3} = 4.89$$

$$F = \frac{52}{4.89} = 10.63$$

### Schritt 3 (Entscheidung)

$$\alpha = 0.05.$$

Freiheitsgrad des Zählers:  $k - 1 = 3 - 1 = 2,$

Freiheitsgrad des Nenners  $n_T - k = 12 - 3 = 9.$

$$F_{0.05}(df_1 = 2; df_2 = 9) = 4.26.$$

Wegen  $F = 10.63 > 4.26 = F_{0.05}$  wird die Nullhypothese abgelehnt. Damit sind die Mittelwerte nicht sämtlich gleich.

### 3.

#### *Arbeitstabelle*

$x_{1i}$	$x_{2i}$	$x_{3i}$	$(x_{1i} - \bar{x}_1)^2$	$(x_{2i} - \bar{x}_2)^2$	$(x_{3i} - \bar{x}_3)^2$
36	56	26	225.000	522.449	560.111
62	13	51	121.000	405.735	1.778
35	24	63	256.000	83.592	177.778
80	28	46	841.000	26.449	13.444
48	44	78	9.000	117.878	802.778
27	47	34	576.000	192.020	245.444
76	20		625.000	172.735	
44			49.000		
408	232	298	2702.000	1520.857	1801.333

$$\bar{x}_1 = \frac{408}{8} = 51.000 \quad \bar{x}_2 = \frac{232}{7} = 33.143 \quad \bar{x}_3 = \frac{298}{6} = 49.667$$

$$s_1^2 = \frac{2702}{7} = 386.00 \quad s_2^2 = \frac{1520.857}{6} = 253.476 \quad s_3^2 = \frac{1801.333}{5} = 360.267$$

$$\bar{x} = \frac{51.000 + 33.143 + 49.667}{3} = 44.603$$

$$SSTR = 8 \cdot (51.000 - 44.603)^2 + 7 \cdot (33.143 - 44.603)^2 + 6 \cdot (49.667 - 44.603)^2 = 1400.559$$

$$MSTR = \frac{1400.559}{3-1} = 700.280$$

$$SSE = (8-1) \cdot 386.000 + (7-1) \cdot 253.476 + (6-1) \cdot 360.267 = 6024.191$$

$$MSE = \frac{6024.191}{21-3} = 334.678$$

$$F = \frac{700.280}{334.678} = 2.092$$

$$\alpha = 0.05$$

$$\text{Freiheitsgrad des Zählers:} \quad k - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\text{Freiheitsgrad des Nenners:} \quad n_T - k = 21 - 3 = 18$$

$$F_{0.05}(df_1 = 2; df_2 = 18) = 3.55$$

$$F = 2.092 < F_{0.05}(df_1 = 2; df_2 = 18) = 3.55.$$

Damit wird die Nullhypothese *nicht* abgelehnt.

#### 4.

##### Schritt 1 (Formulierung der Hypothese)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, \quad H_1: \mu_i \neq \mu_j \text{ für mindestens ein } i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4.$$

##### Schritt 2

Arbeitstabelle

$i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$	$x_{i4}$	$(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$	$(x_{i2} - \bar{x}_2)^2$	$(x_{i3} - \bar{x}_3)^2$	$(x_{i4} - \bar{x}_4)^2$
1	75	59	65	76	30.25	361	196	210.25
2	83	75	70	60	182.25	9	81	2.25
3	68	100	97	52	2.25	484	324	90.25
4	52		90	58	306.25		121	12.25
5			73				36	
Summe	278	234	395	246	521	854	758	315
$\bar{x}_j$	69.5	78.0	79.0	61.5				
$s_j^2$	173.67	427.00	189.50	105.00				

$$\bar{x} = \frac{69.5 + 78.0 + 79.0 + 61.5}{4} = 72$$

$$SSTR = 4 \cdot (69.5 - 72)^2 + 3 \cdot (78.0 - 72)^2 + 5 \cdot (79.0 - 72)^2 + 4 \cdot (61.5 - 72)^2 = 819.0$$

$$MSTR = \frac{819}{4 - 1} = 273.$$

$$SSE = (4 - 1) \cdot 173.67 + (3 - 1) \cdot 427.00 + (5 - 1) \cdot 189.50 + (4 - 1) \cdot 105.00 = 2448.00$$

$$MSE = \frac{2448}{16 - 4} = 204$$

$$F = \frac{273}{204} = 1.3382.$$

##### Schritt 3

$$F_{0.05}(df_1 = 3; df_2 = 12) = 5.95$$

Wegen

$$F = 1.3382 < 5.95$$

wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.

## 5.

### Schritt 1 (Formulierung der Hypothese)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4, \quad H_1: \mu_i \neq \mu_j \text{ für mindestens ein } i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4.$$

### Arbeitstabelle

$i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$	$x_{i4}$	$(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$	$(x_{i2} - \bar{x}_2)^2$	$(x_{i3} - \bar{x}_3)^2$	$(x_{i4} - \bar{x}_4)^2$
1	23	19	23	26	0.02040815	2.93877546	2.46938784	0.08130653
2	24	23	27	24	0.73469395	5.22448986	5.89795904	2.94073453
3	19	18	25	21	17.16326500	7.36734686	0.18367344	22.22987650
4	26	24	26	29	8.16326555	10.79591850	2.04081624	10.79216450
5	22	20	23	28	1.30612235	0.51020406	2.46938784	5.22187853
6	23	22	21	24	0.02040815	1.65306126	12.7551022	2.94073453
7	25	19	27	28	3.44897975	2.93877546	5.89795904	5.22187853
	162	145	172	180	30.8571429	31.4285714	31.7142857	49.4285737
$\bar{x}_j$	23.1429	20.7143	24.5714	25.7143				
$s_j^2$	5.1429	5.2381	5.2857	8.2381				

$$\bar{x} = \frac{23.1429 + 20.7143 + 24.5714 + 25.7143}{4} = 23.5357.$$

$$SSTR = 7 \cdot (23.1429 - 23.5357)^2 + 7 \cdot (20.7143 - 23.5357)^2 + 7 \cdot (24.5714 - 23.5357)^2 + 7 \cdot (25.7143 - 23.5357)^2 = 97.5357$$

$$MSTR = \frac{97.5357}{4 - 1} = 32.5119.$$

$$SSE = (7 - 1) \cdot 5.1429 + (7 - 1) \cdot 5.2381 + (7 - 1) \cdot 5.2857 + (7 - 1) \cdot 8.2381 = 143.4286$$

$$MSE = \frac{143.4286}{28 - 4} = 5.9762$$

$$F = \frac{32.5119}{5.9762} = 5.4402$$

### Schritt 3

$$F_{0.01}(df_1 = 3; df_2 = 24) = 4.72$$

Wegen

$$F = 5.4402 > 4.72$$

wird die Nullhypothese *abgelehnt*.

## 6.

### Schritt 1 (Formulierung der Hypothesen)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad H_1: \mu_i \neq \mu_j \text{ für mindestens ein } i \neq j, i, j = 1, 2, 3.$$

### Schritt 2 (Berechnung der Teststatistik)

Arbeitstabelle

$i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	$x_{i3}$	$(x_{i1} - \bar{x}_1)^2$	$(x_{i2} - \bar{x}_2)^2$	$(x_{i3} - \bar{x}_3)^2$
1	20	22	24	0.44444444	10.027778	1.77777769
2	24	27	24	11.11111111	3.36111099	1.77777769
3	18	20	26	7.11111111	26.6944448	0.44444449
4	22	32	29	1.77777778	46.694444	13.4444447
5	21	26	25	0.11111111	0.69444439	0.11111109
6	19	24	24	2.77777778	1.36111119	1.77777769
<i>Summe</i>	124	151	152	23.3333333	88.8333333	19.3333333
$\bar{x}_j$	20.67	25.17	25.33			
$s_j^2$	4.67	17.77	3.87			

$$\bar{x} = \frac{20.67 + 25.17 + 25.33}{3} = 23.72$$

$$SSTR = 6 \cdot (20.67 - 23.72)^2 + 6 \cdot (25.17 - 23.72)^2 + 6 \cdot (25.33 - 23.72)^2 = 84.1111111$$

$$MSTR = \frac{84.1111111}{3-1} = 42.0555556$$

$$SSE = (6-1) \cdot 4.67 + (6-1) \cdot 17.77 + (6-1) \cdot 3.87 = 131.55$$

$$MSE = \frac{131.55}{18-3} = 8.77$$

$$MSTR = \frac{84.1111111}{3-1} \approx 42.06$$

$$F = \frac{MSTR}{MSE} = \frac{42.06}{8.77} \approx 4,795$$



$$F_{0.05}(df_1 = 2, df_2 = 15) = 3.68.$$

$$F = 4.795 > 3.68 = F_{0.05}(df_1 = 2, df_2 = 15).$$

Lehne  $H_0$  ab.

**2.**

**a)**

Schritt 1 (Formulierung der Hypothesen)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

Schritt 2 (Berechnung der t-Statistik)

$$t_{stat} = \frac{20.67 - 25.17}{\sqrt{8.77 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)}} = -2.632$$

Schritt 3 (Entscheidung)

$$t_{stat} = -2.632 < -2.131 = t_{krit}$$

Lehne  $H_0$  ab.

**b)**

Schritt 1 (Formulierung der Hypothesen)

$$H_0: \mu_1 = \mu_3 \qquad H_1: \mu_1 \neq \mu_3$$

Schritt 2 (Berechnung der t-Statistik)

$$t_{stat} = \frac{20.67 - 25.33}{\sqrt{8.77 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)}} = -2.726$$

Schritt 3 (Entscheidung)

$$t_{stat} = -2.726 < -2.131 = t_{krit}$$

Lehne  $H_0$  ab.

c)

Schritt 1 (Formulierung der Hypothesen)

$$H_0: \mu_2 = \mu_3$$

$$H_1: \mu_2 \neq \mu_3$$

Schritt 2 (Berechnung der t-Statistik)

$$t_{stat} = \frac{25.17 - 25.33}{\sqrt{8.77 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)}} = -0.094$$

Schritt 3 (Entscheidung)

$$t_{stat} = -0.094 > -2.131 = t_{krit}$$

Lehne  $H_0$  nicht ab.

3.

$$\mu_1 \in \left[ 20.67 - 2.131 \cdot \frac{\sqrt{8.77}}{6}, 20.67 + 2.131 \cdot \frac{\sqrt{8.77}}{6} \right] = [19.618, 21.722]$$

$$\mu_2 \in \left[ 25.17 - 2.131 \cdot \frac{\sqrt{8.77}}{6}, 25.17 + 2.131 \cdot \frac{\sqrt{8.77}}{6} \right] = [24.118, 26.221]$$

$$\mu_3 \in \left[ 25.33 - 2.131 \cdot \frac{\sqrt{8.77}}{6}, 25.33 + 2.131 \cdot \frac{\sqrt{8.77}}{6} \right] = [24.278, 26.381]$$

## **B. SPSS-Aufgaben**

*(Letzte Aktualisierung: 14.03.12)*