Kapitel IV

Kurvenanpassung

Lösungen

A. Rechenaufgaben

1.

1.

$$\ln y^* = \ln a_0 e^{a_1 x}$$

$$\ln y^* = \ln a_0 + \ln e^{a_1 x}$$

$$\ln y^* = \ln a_0 + a_1 x \ln e$$

$$\ln y^* = \ln a_0 + a_1 x$$

$$Y^* = A_0 + A_1 x \qquad \text{mit} \quad Y^* = \ln y^*, \quad A_0 = \ln a_0, \quad A_1 = a_1$$

$$\begin{cases} nA_0 \quad + A_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i \\ A_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + A_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln y_i \end{cases}$$

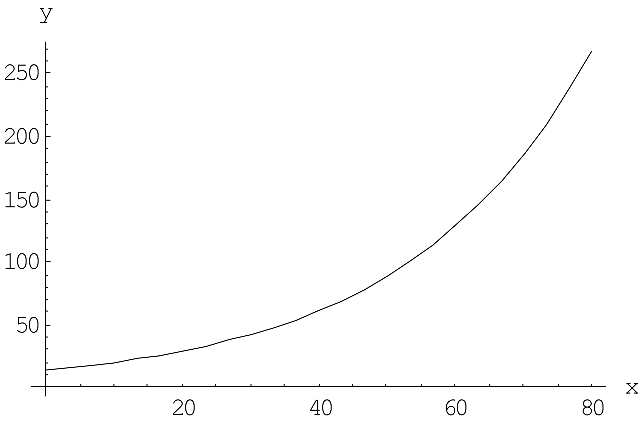
x_i	y_i	Y_i	x_i^2	$x_i \cdot Y_i$
0	15	2.70805020	0	0.00000000
20	30	3.40119738	400	68.02394760
40	50	3.91202301	1600	156.4809200
60	130	4.86753445	3600	292.0520670
72	230	5.43807931	5184	391.5417100
192		20.3268843	10784	908.0986450

$$\begin{cases} 5A_0 \quad +192A_1 = 20.33 \\ 192A_0 + 10784A_1 = 908.10 \end{cases} \Rightarrow \quad A_0 = 2.63153847, \quad A_1 = 0.037355769$$

$$a_0 = 13.89513071, \quad a_1 = A_1 = 0.037355769$$

$$y^* = 13.895e^{0.037x}$$

2.



2.

1.

Die Funktion wird nun linearisiert:

Es gilt:

$$\lg y^* = \lg\left(\gamma A^{\alpha} K^{\beta}\right) = \lg\gamma + \alpha \cdot \lg A + \beta \cdot \lg K$$

Mit

$$Y := \lg y, \quad x_1 := \lg A, \quad x_2 := \lg K$$

und

$$a_0 := \lg\gamma, \quad a_1 := \alpha, \quad a_2 := \beta$$

erhalten wir

die Regressionsfunktion:

$$y^* = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

und die Normalgleichungen:

$$
\begin{aligned}
n \cdot a_0 \quad & + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} && + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} && = \sum_{i=1}^{n} \lg y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 && + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} && = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \lg y_i \\
a_0 \sum_{i=1}^{n} x_{i2} & + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} && + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 && = \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \lg y_i
\end{aligned}
$$

Arbeitstabelle

A_i	K_i	y_i	x_{i1}	x_{i2}	$\lg y_i$	x_{i1}^2	x_{i2}^2	$x_{i1} \cdot \lg y_i$	$x_{i2} \cdot \lg y_i$	$x_{i1} \cdot x_{i2}$
20	30	1814	1.3010	1.4771	3.2586	1.6927	2.1819	4.2396	4.8134	1.9218
25	35	2142	1.3979	1.5441	3.3308	1.9542	2.3841	4.6563	5.1430	2.1585
30	42	2526	1.4771	1.6232	3.4024	2.1819	2.6349	5.0258	5.5230	2.3977
35	39	2590	1.5441	1.5911	3.4133	2.3841	2.5315	5.2704	5.4308	2.4567
40	48	3029	1.6021	1.6812	3.4813	2.5666	2.8266	5.5773	5.8529	2.6934
45	50	3242	1.6532	1.6990	3.5108	2.7331	2.8865	5.8041	5.9648	2.8088
50	46	3243	1.6990	1.6628	3.5109	2.8865	2.7648	5.9650	5.8379	2.8250
245	290	18586	10.6744	11.2785	23.9082	16.3992	18.2103	36.5384	38.5657	17.2619

$$
\begin{cases}
7a_0 + 10.6744a_1 + 11.2785a_2 = 23.9082 \\
10.6744a_0 + 16.3992a_1 + 17.2619a_2 = 36.5384 \\
11.2785a_0 + 17.2619a_1 + 18.2103a_2 = 38.5657
\end{cases}
$$

a_0	a_1	a_2	b
7	10.6744	11.2785	23.9082
10.6744	16.3992	17.2619	36.5384
11.2785	17.2619	18.2103	38.5657
1	1.5249	1.6112	3.4155
0	0.1217	0.0632	0.0804
0	0.0632	0.0382	0.0445
1	0	0.8196	2.4071
0	1	0.5191	0.6612
0	0	7.1257	2.7059
1	0	0	1.9990
0	1	0	0.4028
0	0	1	0.4979

Das Gleichungssystem hat die Lösung

$$a_0 = 1.9990, \quad a_1 = 0.4028, \quad a_2 = 0.4979\,.$$

Damit erhalten wir

$$\gamma = 99.77, \quad \alpha = 0.4028, \quad \beta = 0.4979\,.$$

Die gesuchte Regressionsfunktion lautet:

$$y = 99.77 A^{0.4028} K^{0.4979}$$

2.

A_i	K_i	y_i	y_i^{*2}	$(y_i^* - \bar{y})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
20	30	1814	1813.48316	708391.05	707521.311
25	35	2142	2142.3069	263000.72	263315.595
30	42	2526	2524.64451	17029.8183	16677.8783
35	39	2590	2589.05722	4367.31216	4243.59221
40	48	3029	3029.70085	140293.688	139769.161
45	50	3242	3242.13532	344560.152	344401.303
50	46	3243	3245.13086	348085.84	345576.017
		18586	18586.45882	1825728.58	1821504.86

$$B_{y12} = \frac{1821504.86}{1825728.58} \approx 0.9977 .$$

Die Produktion wird zu etwa 99.77% durch die Faktoren Arbeit und Kapital bestimmt.

<u>*B. SPSS-Aufgaben*</u>

1.

1.
Analyze -> Regression -> Curve Estimation

2.
Übertragen Sie die Variable *lq* in das Feld „*Dependent(s)*".

3.
Wählen Sie die Option „*Time*".

4.
Löschen Sie die Option „*linear*" und wählen Sie „*Quadratic*" und „*Cubic*" (Behalten Sie „*Incldue constant*" und „*Plot models*" bei.

5.
Klicken Sie auf die Schaltfläche „*Save*".

6.
Wählen Sie in der Dialogbox „*Curve Estimation: Save*" für „*Save Variables*" die Option „*Predicted values*" und für "*Predicted Cases"* die Option „*Predict through*".

7.
Geben Sie für "*Observation*" die Zahl 36 ein (das Vorhersagejahr 1995 hat in der Datei *makro.sav* die Nummer 36).

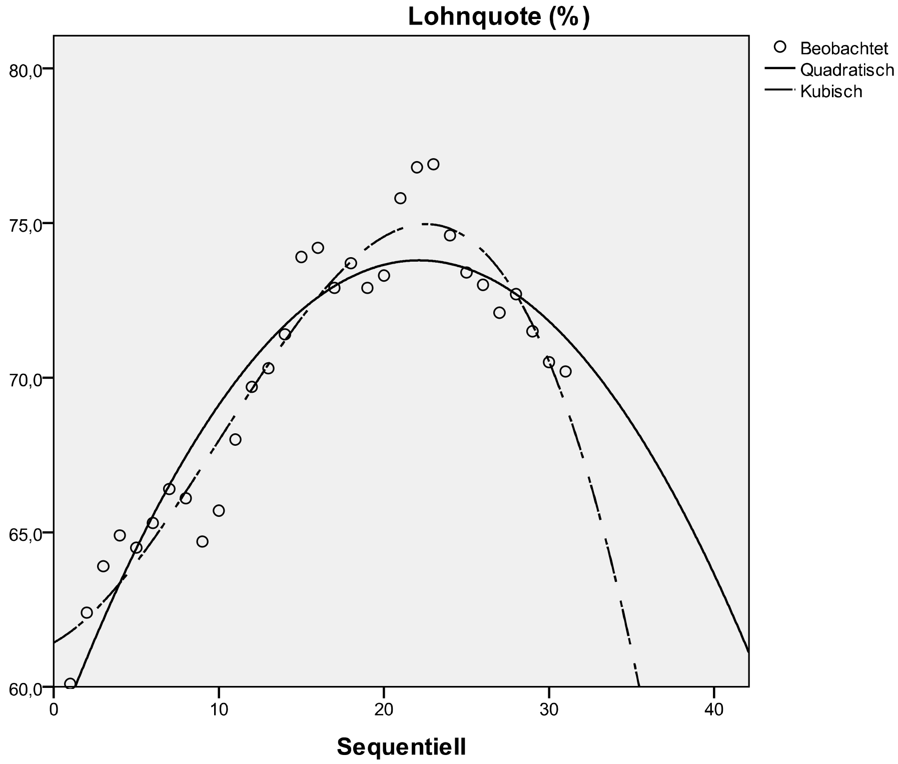
8.
Continue, OK

Output:

Modellzusammenfassung und Parameterschätzer

Abhängige Variable:Lohnquote (%)

	Modellzusammenfassung					Parameterschätzer			
Gleichung	R-Quadrat	F	Freiheitsgrade 1	Freiheitsgrade 2	Sig.	Konstante	b1	b2	b3
Quadratisch	,878	101,225	2	28	,000	58,237	1,406	-,032	
Kubisch	,929	117,381	3	27	,000	61,431	,295	,054	-,002



- Die Koeffizienten der Trendmodelle werden mittels der Methode der kleinsten Quadratsummen berechnet. Das kubische Modell hat mit 0.929 ein höheres Bestimmtheitsmaß als das quadratische (0.878). Auch die Grafik zeigt, dass sich das kubische Modell besser an die Daten anpasst als das quadratische.

- Den Daten von *makro.sav* werden zwei Variable (FIT_1 und FIT_2) hinzugefügt. FIT_1 enthält die Vorhersagewerte des quadratischen und FIT_2 die des kubischen Modells. Für die Jahre 1991 bis 1995 werden die Vorhersagewerte über die Fallzahlen der Datei hinaus fortgeschrieben.

- Die quadratische Trendgleichung lautet: $lq = 58.237 + 1.406t - 0.032t^2$
  Die kubische Trendgleichung lautet: $lq = 61.431 + 0.295t + 0.054t^2 + 0.002t^3$

- Das per „*Plot models*“ („*Diagramm der Modelle*“) erzeugte Diagramm enthält als Beschriftung der horizontalen Achse die Fallnummern.

- Da das Diagramm aber die Jahreszahlen auf der x – Achse enthalten soll, gehen wir folgendermaßen vor:

  - Wähen Sie

    Diagramme -> Veraltete Dialogfelder -> Linie

  - Wählen Sie in der Schaltfläche „*Daten im Diagramm*“ die Optionen „*Mehrfach*“ und „*Werte einzelner Fälle*“.
  - Klicken Sie auf „*Definieren*“.
  - Übertragen Sie in der Dialogbox „*Mehrfachliniendiagramm: Werte einzelner Fälle*“ die Variablen *lq,* FIT_1 und FIT_2 in das Eingabefeld „*Linie entsprechen*“.

- Übertragen Sie *jahr* in „*Kategorienbeschriftungen*“.
- *OK*

- Aus der Grafik kann man erkennen, dass eine mechanistische Vorhersage einer Variablen mit einer Trendgleichung sehr problematisch ist. Für *lq* werden mit wachsender Zeit die Vorhersagewerte immer kleiner und damit sicherlich unrealistisch, da man davon ausgehen kann, dass die Lohnquotensenkung sich nicht unaufhörlich fortsetzt, sondern ein Ende findet.

- Die im Ausgabenfenster erscheinende Grafik soll für Präsentationszwecke noch etwas überarbeitet werden:

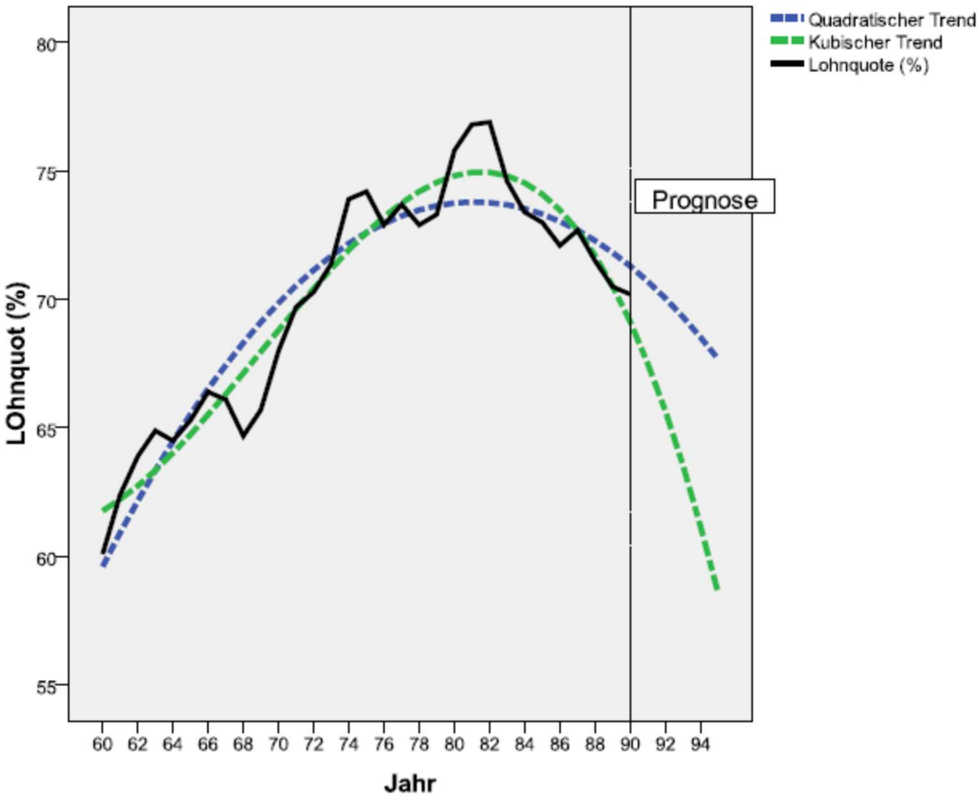
  - Doppelklicken Sie auf die Grafik um sie in den Grafik-Editor zu übertragen.

  - Um den Achsentitel des $y-$Achse („Mittelwert“) zu verändern, markieren Sie die Beschriftung und klicken Sie darauf. Es wird damit der Textüberarbeitungsmodus eingeschaltet (angezeigt durch Umrahmen sowie Drehen des Textes um 90 Grad und einen blinkenden Cursor). Überschreiben Sie den bisherigen „*Achsentitel*“ mit „*Lohnquote (%)*“.
  - Um den Legendentext zu ändern, markieren Sie den Legendentext in der Grafik. Durch nochmaliges Klicken auf eine Legende wird der Legendentext in den Textüberarbeitungsmodus überführt. Der Text „Anpassung für lq von CURVEFIT. MOD_1 QUADRATIC“ wird durch „Quadratischer Trend“, der für „Anpassung für lq von CURVEFIT. MOD_1 CUBIC“ durch „Kubischer Trend“ ersetzt.

  - Um eine senkrechte Bezugslinie einzufügen, klicken Sie auf das Symbol  (Eine Bezugslinie zur x-Achse hinzufügen). Wählen Sie in der Dialogbox „*Eigenschaften*“ „ als Achsenposition „31:90“ und auf der Registerkarte „*Linien*“ der Dialogbox „*Eigenschaften*“ für „*Stil*“ eine unterbrochene Linie.

  - Um die Linienstärke und den Stil der Lohnquote zu verändern: klicken Sie auf eine der Lohnquotenlinien. Wählen Sie auf der Registerkarte „*Linien*“ der Dialogbox „*Eigenschaften*“ den gewünschten Linienstil und die bevorzugte Linienstärke.

  - Mit  („Ein Textfeld einfügen“) wird der Bearbeitungsmodus durch einen Rahmen und blinkenden Cursor angezeigt. Tragen Sie den gewünschten Text ein.



(Letzte Aktualisierung: 18.12.2023)