Einführung in die Mengenlehre

(Lösungen)

1.

$A = \{2\}$, $\quad B = \{1,\ -2,\ 3\}$

$2^A = \{\{\ \}, \{2\}\}$

$2^B = \{\{\ \}, \{1\}, \{-2\}, \{3\}, \{1, -2\}, \{1, 3\}, \{-2, 3\}, \{1, -2, 3\}\}$

2.

$2x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x < \frac{11}{2}$$

$2x - 1 < 10 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{11}{2}$

$2x - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{9}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$-2x + 1 < 10 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{9}{2}$

$$A = \left\{ x \in R^1 \mid -\frac{9}{2} < x < \frac{11}{2} \right\}$$

$$A \cup B = \left\{ x \in R^1 \mid -\frac{9}{2} < x < 15 \right\}$$

$$A \cap B = \left\{ x \in R^1 \mid -2 < x < \frac{11}{2} \right\}$$

$$A \setminus B = \left\{ x \in R^1 \mid -\frac{9}{2} < x \leq -2 \right\}$$

3

a)

$A \cap B = A$,

$A \cup C = \{x \in R^1 \mid -8 < x < 3\}$,

$$\bar{B} = \{x \in R^1 \mid x \le -8\},$$

$$\bar{A} \cup \bar{C} = \{x \in R^1 \mid x \le -1 \vee x \ge 1\}, \quad \bar{A} \cap \bar{C} = \{x \in R^1 \mid x \le -8 \vee x \ge 3\},$$

$$B \setminus A = \{x \in R^1 \mid -8 < x \le -1 \vee x \ge 3\},$$

$$C \setminus B = \varnothing$$

b)

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A) = \{x \in R^1 \mid -1 < x\}$$

$$A \cap (B \setminus C) = \{x \in R^1 \mid 1 \le x < 3\} \ne \{x \in R^1 \mid -8 < x \le -1 \vee x \ge 1\} = (A \cup B) \setminus (A \cap C)$$

5.

a)

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cap B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B}$$

b)

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow \neg(x \in (A \cup B)) \Leftrightarrow \neg(x \in A \wedge x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}$$

6.

1.

$$A \cup (A \cap B) = (A \cap \Omega) \cup (A \cap B) = A \cap (\Omega \cup B) = A \cap \Omega = A.$$

2.

$$(A \cap B) \cup \left(A \cap \bar{B}\right) = A \cap \left(B \cup \bar{B}\right) = A \cap \Omega = A$$

3.

$$(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = A \cap B \cap \bar{B} = \varnothing$$

7.

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) &= [A \cap (B \cup \bar{B})] \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= (A \cap \Omega) \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= A \cup (\bar{A} \cap B) \\ &= (B \cap \bar{A}) \cup A \\ &= (B \cup A) \cap (\bar{A} \cup A)\end{aligned}$$

$$=(B\cup A)\cap\Omega.$$

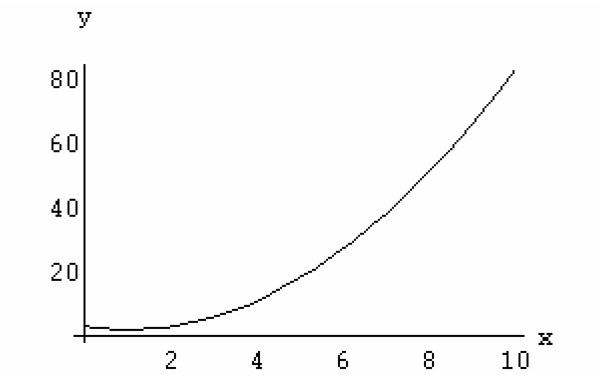
$$=A\cup B.$$

9.

a)

$D(A_1)=\{x\in R^1 \mid x\geq 0\}$; $\quad W(A_1)=\{y\in R^1 \mid y\geq 2\}$

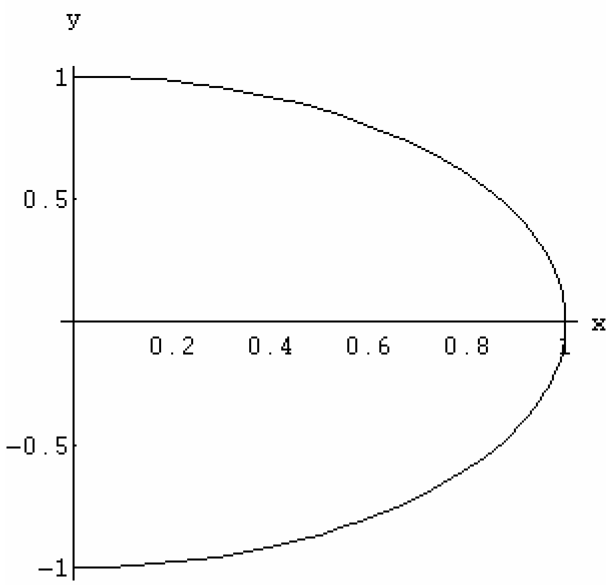
die Abbildung A_1 ist eindeutig und somit eine Funktion. Die inverse Abbildung ist keine Funktion, denn dem Wert $y=3$ sind zum Beispiel zwei verschiedenen x-Werte ($x=0$ und $x=3$) zugeordnet.



b)

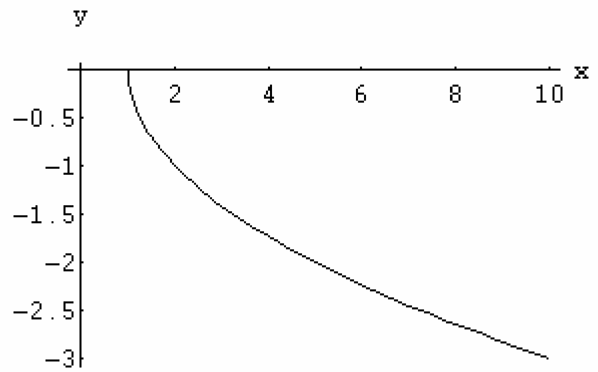
$D(A_2)=\{x\in R^1 \mid 0\leq x\leq 1\}$, $\quad y^2=1-x^2$; $\quad W(A_2)=\{y\in R^1 \mid -1\leq y\leq 1\}$, $\quad y=\pm\sqrt{1-x^2}$

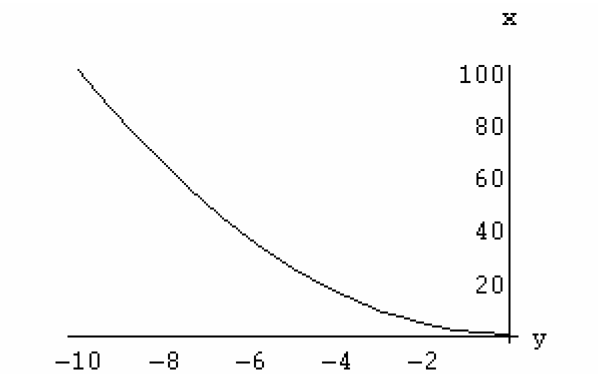
A_2 ist keine Funktion, denn dem Wert $x=0$ sind zwei Werte (y=-1 und y=+1) zugeordnet. A_2 ist also nicht eindeutig. Die inverse Abbildung $A_2^{-1}=\{(x,y)\in R^2 \mid x=\sqrt{y^2-1}\}$ ist hier eine Funktion.



c)

$D(A_3) = \{x \in R^1 \mid x \geq 1\}$; $W(A_3) = \{y \in R^1 \mid y \leq 0\}$; $A_3^{-1} = \{(x, y) \in R^2 \mid y^2 + 1 = x \wedge y \leq 0\}$
A_3 und A_3^{-1} sind Funktionen.





10.
Es gilt

$$D(A) = \{a, b, c\} = X; \qquad W(A) = \{x, y, z\} \subset Y.$$

Es handelt sich um eine eineindeutige Abbildung von X in Y

11.
a)

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_2(f_1(x)) = f_2(x+1) = (x+3)(x+1) + (x+1)^3$$

$$(f_3 \circ f_2)(x) = f_2(f_3(x)) = f_2(\cos x) = (\cos x + 2)^2 + 3\cos x + \cos^3 x$$

b)

$$(f_1 \circ f_4)(x) = f_4(f_1(x)) = f_4(x+1) = (x+2)^2$$

$$(f_3 \circ f_4)(x) = f_4(f_3(x)) = f_4(\cos x) = (\cos x + 1)^2$$

$$D(f_1 \circ f_4) = \mathbb{R}^1; \qquad W(f_1 \circ f_4) = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid y \geq 0\}$$

$$D(f_3 \circ f_4) = \mathbb{R}^1; \qquad W(f_3 \circ f_4) = \{y \in \mathbb{R}^1 \mid 0 \leq y \leq 4\}$$

13.

R ist *nicht reflexiv*, denn z. B. $(2,2) \notin R$.

R ist *nicht symmetrisch*, denn z. B. aus $(2,3)$ folgt nicht $(3,2) \in R$.

R ist *antisymmetrisch*, denn $(1,1) \in R$.

$[(x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x) \Rightarrow x = y, \quad \forall x, y \in A]$

R ist *transitiv*, denn es gilt:

$(1,1) \in R$

$((2,3) \in R \wedge (3,6) \in R) \Rightarrow (2,6) \in R$

$[(x\ R\ y) \wedge (y\ R\ z) \Rightarrow (x,z) \in R, \quad \forall x, y, z \in A]$

14.

1.

$$\bar{A} =]0,\ 2[\cup [10,\ \infty[\,.$$

P_1 war nicht kostenlos, aber billiger als 2 €.

2.

$$A \setminus B = [2,\ 6[\,.$$

Der Käufer hat für P_1 mindestens 2 € jedoch weniger als 6 € bezahlt.

3.

$$A \cup B = [2,\ 15].$$

Der Kaufpreis der Produkte P_1 und P_2 war mindestens 2 € und höchstens 15 €.

4.

$$A \cap B = [6,\ 10].$$

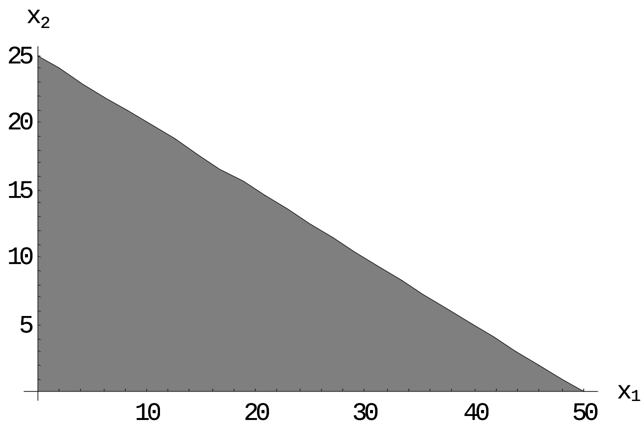
Die preismäßige Gemeinsamkeit der Produkte P_1 und P_2 war, dass beide mindestens 6 € und höchstens 10 € kosteten.

15.
Sei

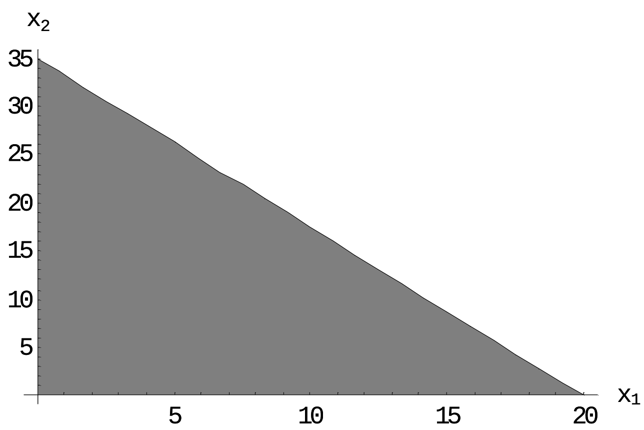
x_i : Produktionsmenge P_i, $i = 1, 2$.

1.

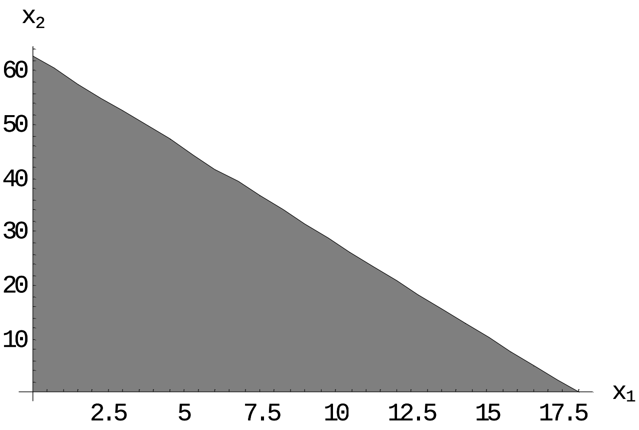
$$M_1 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 + 2x_2 \le 50,\ x_1, x_2 \ge 0 \right\}$$



$$M_2 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \mid 7x_1 + 4x_2 \le 140,\ x_1, x_2 \ge 0 \right\}$$

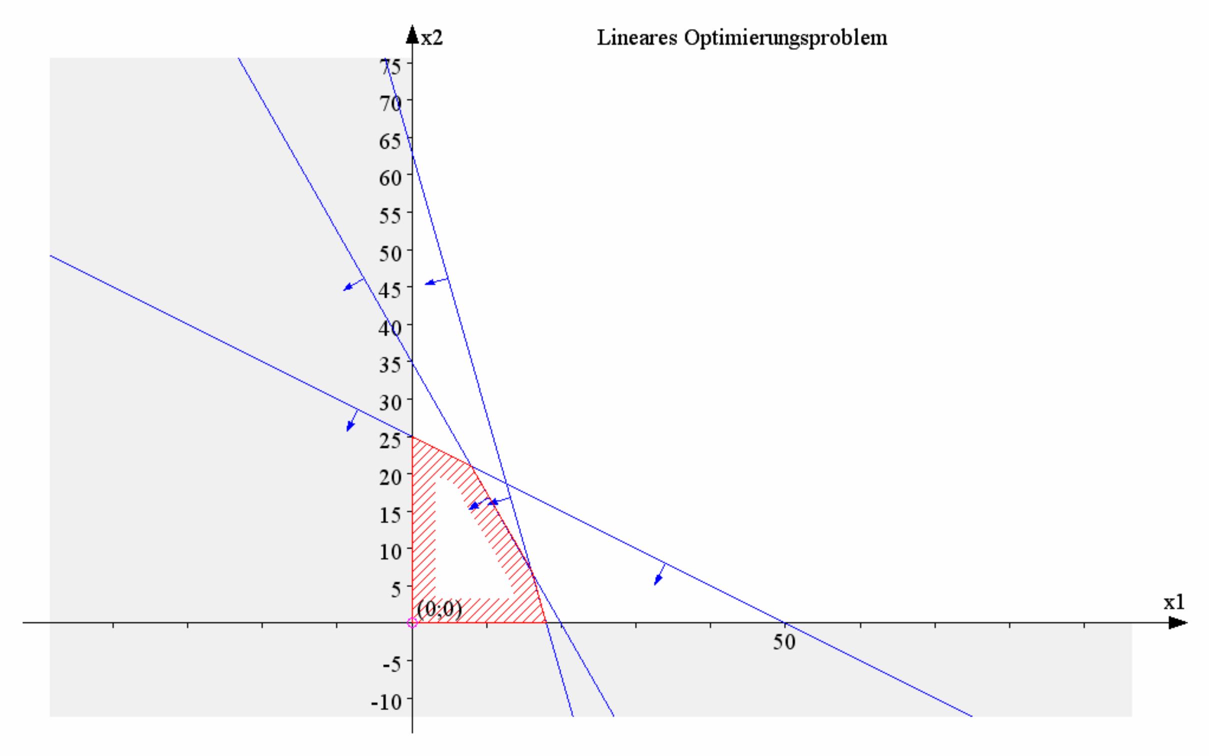


$$M_3 = \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \mid 7x_1 + 2x_2 \le 126,\ x_1, x_2 \ge 0 \right\}$$



2.

$$
\begin{aligned}
M &= M_1 \cap M_2 \cap M_3 \\
&= \left\{ (x_1, x_2) \in R^2 \mid x_1 + 2x_2 \le 50,\ 7x_1 + 4x_2 \le 140,\ 7x_1 + 2x_2 \le 126,\ x_1, x_2 \ge 0 \right\}
\end{aligned}
$$



(Letzte Aktualisierung: 28.12.2010)