

# Einführung in die Mengenlehre

## (Aufgaben)

1.

Geben Sie die folgenden Mengen  $A$  und  $B$  elementweise an und bestimmen Sie die Potenzmengen  $2^A$  und  $2^B$ :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid x^2 - 4x + 4 = 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3) = 0\}$$

2.

Gegeben seien die Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid |2x-1| < 10\}; \quad B = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid -2 \leq x < 15\}.$$

Bilden Sie die Mengen  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$ .

3.

Es seien

$$A = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid -1 < x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid -8 < x\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid -8 < x < 1\}.$$

a) Bestimmen Sie

$$A \cap B, \quad A \cup C, \quad \bar{B}, \quad \bar{A} \cup \bar{C}, \quad \bar{A} \cap \bar{C}, \quad B \setminus A, \quad C \setminus B.$$

b) Zeigen Sie, dass für dieses Beispiel gilt

$$A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$$

und

$$A \cap (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cap C).$$

4.

Stellen Sie die folgende Menge im Venn-Diagramm dar:

$$(A \setminus B) \cap [(A \cap B) \cup (A \setminus C)]$$

(Die Mengen sollen so liegen, dass  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$  ist.)

**5.**

Weisen Sie die Gültigkeit der folgenden Beziehungen nach:

a)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

b)  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

**6.**

Seien  $A$  und  $B$  beliebige Mengen. Zeigen Sie die nachfolgenden Identitäten:

1.  $A \cup (A \cap B) = A$

2.  $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$

3.  $(A \cap B) \cap (A \cap \bar{B}) = \emptyset$

**7.**

Seien  $A$  und  $B$  beliebige Mengen. Zeigen Sie die nachfolgende Identität:

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B.$$

**8.**

Stellen Sie die Produktmenge  $A \times B$  graphisch dar, wobei

$$A = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid 1 \leq x \leq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}^1 \mid 4 < x < 5\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}^1 \mid 0 \leq x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R}^1 \mid 4 \leq x < 7\}$$

**9.**

Geben Sie für die folgenden Abbildungen jeweils den Definitionsbereich und den Wertebereich an und prüfen Sie, ob die angegebenen Abbildungen Funktionen sind.

a)  $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \wedge y = x^2 - 2x + 3\}$

b)  $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \wedge x \geq 0\}$

c)  $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\sqrt{x-1}\}$

Welche inversen Abbildungen sind auch Funktionen? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

**10.**

Gegeben seien die Mengen

$$X := \{a, b, c\}; \quad Y := \{u, x, y, z\}.$$

Charakterisieren Sie die Abbildung  $A = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$ .

**11.**

Gegeben seien die folgenden reellen Funktionen

$$f_1(x) = x + 1$$

$$f_2(x) = (x + 2)^2 + 3x + x^3$$

$$f_3(x) = \cos x$$

$$f_4(x) = (x + 1)^2$$

a) Geben Sie die verketteten Funktionen  $f_1 \circ f_2$  und  $f_3 \circ f_2$  an.

b) Geben Sie Definitions- und Wertebereiche der Funktionen  $f_1 \circ f_4$  und  $f_3 \circ f_4$  an.

**12.**

Es sei

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

Zeichnen Sie Graphen von  $f$  und  $f^{-1}$  in einem kartesischen Koordinatensystem.

**13.**

Es sei  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $R \subseteq A \times A$  die folgende Relation:

$$R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 6), (1, 4), (2, 6)\}.$$

Überprüfen Sie, ob diese Relation reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch bzw. transitiv ist.

**14.**

Für den Preis [in Euro]  $p_1$  bzw.  $p_2$  des Produktes  $P_1$  bzw.  $P_2$  galt im letzten Jahr:

$$p_1 \in [2, 10[ := A, \quad p_2 \in [6, 15] =: B.$$

Bilden und interpretieren Sie folgende Mengen:

$$1. \bar{A}, \quad 2. A \setminus B, \quad 3. A \cup B, \quad 4. A \cap B.$$

**15.**

Ein Betrieb stellt aus den Produktionsfaktoren  $F_1, F_2$  und  $F_3$  die Endprodukte  $P_1$  und  $P_2$  her.

Folgende Informationen liegen vor:

	$P_1$	$P_2$	Faktormenge
$F_1$	1	2	50
$F_2$	7	4	140
$F_3$	7	2	126

1. Stellen Sie den Verbrauch an  $F_1, F_2$  und  $F_3$  als Mengen  $M_1, M_2$  und  $M_3$  analytisch *und* graphisch dar!
2. Wie lässt sich die Menge aller Produktionsprogramme analytisch *und* graphisch darstellen?

*(Letzte Aktualisierung: 28.12.2010)*