Einführung in die Mengenlehre

D. 1. (***Menge***, von Georg Cantor, 1845-1918)
Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen, wobei von jedem Objekt eindeutig feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht.
Die zur Menge gehörenden Objekte heißen auch *Elemente* der Menge. Die Elementbeziehung wird mit dem Symbol $\in$ bezeichnet. So bedeutet $x \in M$, dass das Objekt x ein Element der Menge M ist, $y \notin M$ bedeutet dagegen, dass y kein Element von M ist.

B. 1.
Man kann Mengen auf verschiedene Weise angeben:

1) Alle Elemente der Menge explizit angeben (wenn möglich),
2) Durch die Vorschrift

$$M := \{x \in \Omega \mid H(x)\},$$

d. h. M ist die Menge aller Elemente aus einer *Grundmenge* Ω, für die die Aussageform $H(x)$ zu einer wahren Aussage wird.

BS. 1.
1) Die Menge

$$M := \{K, \quad A, \quad F, \quad E\}$$

stellt die Menge aller Buchstaben des Wortes KAFFEE dar. Da die Elemente wohlunterschieden sein müssen, tauchen die Buchstaben F und E jeweils nur einmal auf.

2)
$$M := \{x \in \boldsymbol{N} \mid x < 15 \wedge x \neq 10\},$$

$\boldsymbol{N}$: Menge der natürlichen Zahlen.

D. 2. (*Teilmenge*)
Seien A und B zwei Mengen. Die Menge A heißt *Teilmenge* der Menge B, falls jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist, also:

$$\forall x \quad (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Symbolisch: $A \subseteq B$.

B. 2.
Zur Illustration von Zusammenhängen in der Mengenlehre sind sogenannten *Venn-Diagramme*, bei denen Mengen durch Flächen dargestellt werden, gebräuchlich.

D. 3. (*Mengengleichheit*)
Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, falls jedes Element von A zugleich Element von B und jedes Element von B zugleich ein Element von A. Also gilt:

$$A = B \Leftrightarrow \left(A \subseteq B \wedge B \subseteq A\right)$$

BS. 2.
Sei A die Menge aller Buchstaben des Wortes ANNA und B die Menge aller Buchstaben des Wortes AN. Dann gilt

$$A = \left\{A, N\right\} = B.$$

D. 4. (*Leere Menge*)
Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\varnothing$ bezeichnet.

BS. 3.
Sei M die Menge aller Studenten, die jünger als 3 Jahre sind. Dann ist $M = \varnothing$.

D. 5. (*Potenzmenge*)
Es sei A eine gegebene Menge. Die Menge $\left\{M \mid M \subseteq A\right\}$ aller Teilmengen von A heißt *Potenzmenge* von A und wird mit 2^A bezeichnet.

S. 1.
Sei A eine beliebige Menge und 2^A ihre Potenzmenge. Dann gilt $\varnothing \subseteq 2^A$ und $A \subseteq 2^A$.
Wenn die Menge A n Elemente besitzt, so hat die Potenzmenge 2^A genau 2^n.

BS. 4. :
a) Es sei $A = \left\{1, \quad 2, \quad 3\right\}$. Dann gilt

$$2^A = \left\{ \ \varnothing, \left\{1\right\}, \ \left\{2\right\}, \ \left\{3\right\}, \ \left\{1, \ 2\right\}, \ \left\{1, \ 3\right\}, \ \left\{2,3\right\}, \ \left\{1, \ 2, \ 3\right\} \ \right\}.$$

b) Es sei $A = \left\{*, \quad /\right\}$. Dann gilt

$$2^A = \left\{ \ \varnothing, \left\{*\right\}, \ \left\{/\right\}, \ \left\{*, \ /\right\} \ \right\}.$$

B. 3.
Vorsicht ist geboten bei der Definition von Mengen bzw. Eigenschaften, wenn man mit dem Wort „alle“ zu großzügig umgeht. So führt etwa der Begriff der Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten, zu Widersprüchen. Dazu soll ein klassisches Beispiel angeführt werden:
Definiert man einen Barbier als den Mann eines Ortes, der genau alle die Männer dieses Ortes rasiert, die sich nicht selbst rasieren, so bleibt die Frage „Wer rasiert den Barbier?“

unbeantwortet. Diese Definition des Barbiers durch die angegebene Eigenschaft ist daher sinnlos.

<u>D. 6.</u> (*Vereinigungsmenge*)
Seien A und B Mengen. Die Menge

$$\{x \mid x \in A \vee x \in B\} =: A \cup B$$

heißt *Vereinigungsmenge* von A und B.

<u>D. 7.</u> (*Durchschnittsmenge*)
Seien A und B Mengen. Die Menge

$$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\} =: A \cap B$$

heißt *Durchschnittsmenge* von A und B.

<u>D. 8.</u> (*Disjunkte Mengen*)
Die Mengen A und B heißen *disjunkt*, wenn gilt $A \cap B = \emptyset$.

<u>BS. 5.</u>
a) Seien

$$A = \{1, \quad 2, \quad 3\}, \qquad B = \{10\}.$$

Dann ist

$$A \cup B = \{1, \quad 2, \quad 3, \quad 10\}, \qquad A \cap B = \emptyset.$$

b) Seien

$$A = \{a, \quad b, \quad c\}, \qquad B = \{a\}.$$

Dann ist $B \subseteq A$, und es gelten die folgenden Beziehungen:

$$A \cup B = \{a, \quad b, \quad c\} = A, \qquad A \cap B = \{a\} = B.$$

<u>S. 2.</u> :
Seien A und B Mengen mit $A \subseteq B$. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$A \cup B = A, \qquad A \cap B = B.$$

<u>S. 3.</u>
Seien A eine beliebige Menge. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$$

<u>D. 9.</u> (*Differenzmenge*)
Seien A und B Mengen. Die Menge

$$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} =: A \setminus B$$

heißt *Differenzmenge* von A und B.

<u>D. 10.</u> (*Komplement*)
Sei Ω eine Grundmenge und $A \subseteq \Omega$. Dann heißt $\Omega \setminus A$ *Komplement von* A *bzgl.* Ω:

$$\{x \in \Omega \mid x \notin A\} =: \bar{A}.$$

<u>BS. 6.</u>
Sei $\Omega = N$, $A = \{1, \ 2\}$, $B = \{2, \ 3\}$. Dann gilt:

$$A \cap B = \{2\}, \qquad A \cup B = \{1, \ 2, \ 3\},$$
$$A \setminus B = \{1\}, \qquad B \setminus A = \{3\},$$
$$\bar{A} = N \setminus \{1, \ 2\} = \{3, \ 4, \ 5, \ 6, \ \ldots\}.$$

<u>BS. 7.</u>
Es seien A die Menge aller geraden natürlichen Zahlen und B die Menge aller ungeraden natürlichen Zahlen.
Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$A \cap B = \emptyset, \qquad \bar{A} = B, \qquad A \setminus B = A,$$
$$A \cup B = N, \qquad \bar{B} = A, \qquad B \setminus A = B.$$

<u>S. 4.</u>
Es seien $A, \ B, \ C$ beliebige Mengen. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

a) *Kommutativität*:

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A,$$

b) *Assoziativität* :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

c) *Distributivität* :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

<u>S. 5.</u>
Es seien $A, \quad B, \quad C$ beliebige Mengen. Dann gelten die folgenden Beziehungen:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
c) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B.$

<u>D. 11.</u> (*Geordnetes Paar*)
Ein *geordnetes Paar* (a,b) besteht aus zwei Elementen $a, \quad b$, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt: a ist das erste Element und b ist das zweite Element.

<u>D. 12.</u> (*Produktmenge*)
Seien A und B zwei Mengen. Als *Produktmenge* von A und B bezeichnet man die Menge

$$\{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\} =: A \wedge B .$$

<u>BS. 8.</u>
Seien $A = \{a, \quad b\}, \quad B = \{c, \quad d\}$. Dann ist:

$$AxB = \{(a, \quad c), \quad (a, \quad d), \quad (b, \quad c), \quad (b, \quad d)\}.$$

Es gilt aber:

$$BxA = \{(c, \quad a), \quad (d, \quad a), \quad (c, \quad b), \quad (d, \quad b)\}.$$

Dies führt zu:

<u>S. 6.</u>
Es gilt im allgemeinen

$$AxB \neq BxA .$$

<u>S.7.</u>
Für beliebige nichtleere Mengen $A, \quad B, \quad C$ gilt:

a) $Ax(B \cup C) = (AxB) \cup (AxC)$,
b) $Ax(B \cap C) = (AxB) \cap (AxC)$,
c) $(A \cup B)xC = (AxC) \cup (BxC)$,
d) $(A \cap B)xC = (AxC) \cap (BxC)$.

BS. 9.
Die Aussagen des Satzes S.7. sollen hier veranschaulicht werden:

a) Es seien $A=\{1\}, \quad B=\{2\}, \quad C=\{3\}$. Dann ist

$Ax(B\cup C)=Ax\{2, \quad 3\}=\{(1, \quad 2), \quad (1, \quad 3)\}$

und

$(AxB)\cup(AxC)=\{(1, \quad 2)\}\cup\{(1, \quad 3)\}=\{(1, \quad 2), \quad (1, \quad 3)\}$.

Somit gilt hier die Beziehung a).

b) Es seien $A=\{1\}, \quad B=\{2, \quad 3\}, \quad C=\{3, \quad 4\}$. Dann ist

$Ax(B\cap C)=(AxB)\cap(AxC)=\{(1, \quad 3)\}$.

Somit gilt hier die Beziehung b).

c) Es seien $A=\{1\}, \quad B=\{2\}, \quad C=\{3\}$. Dann ist

$(A\cup B)xC=\{1, \quad 2\}x\{3\}=\{(1, \quad 3), \quad (2, \quad 3)\}$

und

$(AxC)\cup(BxC)=\{(1, \quad 3)\}\cup\{(2, \quad 3)\}=\{(1, \quad 3), \quad (2, \quad 3)\}$.

Somit gilt hier die Beziehung c).

d) Es seien $A=\{1, \quad 2\}, \quad B=\{2, \quad 3\}, \quad C=\{4\}$. Dann ist

$(A\cap B)xC=\{(2, \quad 4)\}$

und

$(AxC)\cap(BxC)=\{(1, \quad 4), \quad (2, \quad 4)\}\cap\{(1, \quad 4), \quad (2, \quad 4)\}=\{(2, \quad 4)\}$.

Somit gilt hier die Beziehung d).

D. 13. (***n-te Potenz einer Menge***)
Sei A eine Menge. Die Menge

$$\{(a_1, \; a_2, \; ...,a_n)\,|\; a_1\in A, \; a_2\in A, \; ...,a_n\in A\}=: A^n \; .$$

heißt *n-te Potenz der Menge* A.

B. 4.
Besonders häufig werden die n-ten Potenzen der Menge der reellen Zahlen $\boldsymbol{R}^1$ verwendet. Es gilt

$$R^n=\{(x_1, \; x_2, \; ...,x_n) \;|\; x_i\in R^1\}.$$

BS. 10.
Es sie $A=\{!, \quad ?\}$. Dann ist

$$A^2 = AxA=\{(!, \quad !), \quad (!, \quad ?), \quad (?, \quad !), \quad (?, \quad ?)\}.$$

D. 14. (***Abbildung***)
Seien X, Y beliebige Mengen. Die Menge $A \subseteq XxY$ heißt *Abbildung aus* X *in* Y, und für beliebige geordnete Paare $(x, \ y) \in A$ heißt x *Urbild* von y und y *Bild* von x.

BS. 11.
a) Im ersten Semester werden für die Betriebswirtschaftsstudenten 10 verschiedene Studienfächer angeboten. Nach der Einschreibung steht fest, welcher Student sich in welches Fach eingeschrieben hat; es liegt eine Abbildung aus der Menge der Studenten in die Menge der angebotenen Fächer vor. Ein geordnetes Paar $(x, \ y)$, wobei x ein bestimmter Student und y ein bestimmtes Fach ist, gehört genau dann zu der Abbildung, wenn sich der Student x in das Fach y eingeschrieben hat.
b) Man betrachte die Abbildung, die jedem Menschen seine Körpergröße zuordnet. Hier ist also X die Menge aller Menschen und Y die Menge aller reellen Zahlen. Die Abbildung A ist hier die Menge aller geordneten Paare $(x, \ y)$, wobei die reelle Zahl y die Körpergröße des Menschen x angibt.

B. 5.
Die Beispiele machen deutlich, daß man eine Abbildung $A \subseteq XxY$ auch als Zuordnungsvorschrift zwischen den Elementen der Menge X und den Elementen der Menge Y auffassen kann. Statt $(x, \ y) \in A$ kann man auch sagen: dem Element x wird das Element y zugeordnet. Interessiert man sich für die Menge aller Bilder y, die einem gegebenen Urbild x durch die Abbildung A zugeordnet werden, muss man die Menge

$$A(x) := \{y \mid (x, y) \in A\}$$

untersuchen.

B. 6.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Abbildungen graphisch darzustellen. Da jede Abbildung Teilmenge einer Produktmenge ist, ergibt sich für Abbildung $A \subseteq R^1 x R^1$ die Möglichkeit der Darstellung im kartesischen Koordinatensystem der Ebene. Geht man von der Erklärung einer Abbildung als Zuordnungsvorschrift aus, so bietet sich eine Darstellung mit Hilfe von Pfeilen an, die von den entsprechenden Urbildern zu den zugehörigen Bildern weisen.

BS. 12.
a) Es seien $X = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$ und $Y = \{2, 4, 5\}$. Die Abbildung A ist durch drei geordnete Paare charakterisiert, nämlich

$$A = \{(1, \ 2), \ (1, \ 4), \ (3, \ 5)\}.$$

b) Es seien $X = \boldsymbol{R}$ und $Y = \boldsymbol{R}$ und $A = \{(x, x) \mid x \in \boldsymbol{R}\}$. Hier gehören unendlich viele geordnete Paare zur Abbildung A, die zweite graphische Darstellung ist nicht möglich. Die Abbildung A lässt sich aber durch eine Gerade in der Ebene veranschaulichen:

Die Gleichung $y = x$ beschreibt die zugehörige Zuordnungsvorschrift.

B. 7.
Im Beispiel BS. 12. Sieht man, daß es möglich ist, dass nicht allen Elementen der Menge X bzw. nicht allen Elementen der Menge Y durch die Abbildung A Bilder bzw. Urbilder zugeordnet werden. Um diejenigen Teilmengen der Mengen X bzw. Y besser charakterisieren zu können, die mit der Abbildung A im Zusammenhang stehen, werden die Begriffe *Definitions*- und *Wertebereich* eingeführt:

D. 15. : (*Definitionsbereich, Wertebereich*):
Es sei $A \subseteq XxY$ eine Abbildung. Die Menge

$$D(A) := \{x \in X \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x, y) \in A\}$$

aller Elemente aus X, zu denen ein Bild y bei der Abbildung A existiert, heißt *Definitionsbereich* (bzw. *Urbildbereich*) der Abbildung A.
Die Menge

$$W(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } (x, y) \in A\}$$

aller Elemente aus XY, zu denen ein Urbild x bei der Abbildung A existiert, heißt *Wertebereich* (bzw. *Bildbereich*) der Abbildung A.

B. 8. :
Es sind folgende Sprechweisen zur Charakterisierung einer Abbildung $A \subseteq XxY$ üblich:

1. A ist eine Abbildung *von* X *in* Y, falls $D(A) = X$ ist.
2. A ist eine Abbildung *aus* X *auf* Y, falls $W(A) = Y$ ist.
3. A ist eine Abbildung *von* X *auf* Y, falls $D(A) = X$ und $W(A) = Y$ ist.

BS. 13. :
1. Die Abbildung, die jedem Menschen seine Körpergröße zuordnet, ist eine Abbildung *von* der Menge aller Menschen *in* die Menge der reellen Zahlen.
2. Die Abbildung, die jeder geraden natürlichen Zahl ihren Vorgänger zuordnet, ist eine Abbildung aus der Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen.

D. 16. : (*Umkehrabbildung*):
Es sei $A \subseteq XxY$. Dann heißt die Menge

$$A^{-1} := \{(y, x) \mid (y, x) \in YxX \wedge (x, y) \in A\}$$

Umkehrabbildung der Menge A.

F. 1. :
Es gilt also $D(A^{-1}) = W(A)$ und $D(A) = W(A^{-1})$.

F. 2. :
Es gilt $(A^{-1})^{-1} = A.$

<u>D. 17.</u> (*Verkettete Abbildung*)
Es seien X, Y, Z Mengen, $A \subseteq XxY$ und $B \subseteq YxZ$ Abbildungen, und es gelte $W(A) \subseteq D(B)$.
Dann heißt die Abbildung

$$A \circ B := \{(x,z) \in XxZ \mid \exists y \in Y \text{ mit } (x,y) \in A \wedge (y,z) \in B \}.$$

verkettete Abbildung.

<u>BS. 14.</u>
Es seien $X = \{1,2,3\}$, $Y = \{a,b,c\}$ und $Z = \{1,2\}$. Dann ergibt sich $A \circ B := \{(1,1),(3,1)\}$.

<u>D. 18.</u> (*Eindeutige Abbildung*)
Eine Abbildung $A \subseteq XxY$ heißt *eindeutig*, falls für beliebige $x \in X$ und $y \in Y$ gilt :

$$((x,y) \in A \wedge (x,z) \in A) \Rightarrow y = z .$$

<u>D. 19.</u> (*Eineindeutige bzw. umkehrbar eindeutige Abbildung*)
Es sei $A \subseteq XxY$ eine Abbildung. Die Abbildung $A \subseteq XxY$ heißt *eineindeutig* (bzw. *umkehrbar eindeutig*), wenn die Abbildungen A und A^{-1} beide eindeutig sind.

<u>BS. 15.</u>
1. Die Abbildung, die jedem Auto seine Autonummer zuordnet, ist eineindeutig.
2. Die Abbildung, die jedem Menschen seine Kinder zuordnet, ist weder eindeutig, noch ist die Umkehrabbildung eindeutig.
3. Die Abbildung, die jeder Strecke ihre Länge zuordnet, ist eindeutig.
4. Man betrachte die Abbildung, die jedem Tag des Jahres die Menge aller Menschen zuordnet, die an diesem Tag Geburtstag haben. Sie ist nicht eindeutig. Die Umkehrabbildung dieser Abbildung ordnet jedem Menschen einen Geburtstag zu. Sie ist eindeutig.

<u>D. 20.</u> : (*Funktion*)
Es sei $f \subseteq XxY$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt *Funktion*, falls sie eindeutig ist.
Man schreibt dann auch $f : X \to Y$ und $f(x) = y$, wobei y das (eindeutig bestimmte) Bild des Urbildes x ist.
Falls die Menge X eine Menge der reellen Zahlen $\boldsymbol{R}^1$ (bzw. von $\boldsymbol{R}^n$) und Y ebenfalls eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen ist, so spricht man von einer *reellen Funktion* von einer (bzw. mehreren) Variablen.

<u>D. 21.</u> : (*Graph einer Funktion*)
Es sei $f : X \to \boldsymbol{R}^1$ eine reelle Funktion . Dann heißt die Menge

$$graph\ f := \{(x,y) \in XxR^1 \mid f(x) = y\}$$

Graph der Funktion f .

B. 9.
Wird die Funktion $f : X \to \boldsymbol{R}^1$ als Abbildung aufgefasst, so ist diese Abbildung nichts weiter als ihr Graph.
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um Funktionen anzugeben. Dazu gehören:

° die Tabellenform. Hier werden die geordneten Paare (x, y) aufgezählt;
° die Funktionsgleichung $f(x) = y$;
° die zusammenfassende Schreibweise für mehrere Teilfunktionen mit Hilfe geschweifter Klammern.

BS. 16.
Man betrachte die folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \le -1 \\ x & -1 < x \le 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

BS. 17.
1. Man betrachte die Funktion $f : \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$ mit $y = f(x) = 1 + x$. Diese Funktion ist eineindeutig, die Umkehrfunktion existiert, und es gilt $x = f^{-1}(y) = y - 1$.

2. Man betrachte die Funktion $f : \boldsymbol{R}^1 \to \boldsymbol{R}^1$ mit $y = f(x) = x^2$.
   Diese Funktion ist nicht eineindeutig, die Funktionsgleichung lässt sich nicht über dem gesamten Definitionsbereich nach x auflösen. Zerlegt man aber den Definitionsbereich in zwei Teile

   $$D_1 = \{x \in \boldsymbol{R}^1 \mid x \ge 0\} \quad \text{und} \quad D_2 = \{x \in \boldsymbol{R}^1 \mid x < 0\},$$

   so sind die Funktionen

   $$y = f(x) = x^2, x \in D_1 \quad \text{und} \quad y = f(x) = x^2, x \in D_2$$

   eineindeutig über diesen Teilbereichen des Definitionsbereiches. Es gibt also eine Umkehrfunktion f_1^{-1} so, dass $x = f_1^{-1}(y)$ gilt für alle $x \in D_1$ und eine zweite Umkehrfunktion $x = f_2^{-1}(y)$ für alle $x \in D_2$.
   In diesem Beispiel ist

   $$x = f_1^{-1}(y) = \sqrt{y} \;\; \forall x \in D_1 \quad \text{und} \quad x = f_2^{-1}(y) = -\sqrt{y} \;\; \forall x \in D_2 .$$

D. 22. (***Rechenoperationen für Funktion***)
Es seien f und g Funktionen mit den Definitionsbereichen $D(f)$ bzw. $D(g)$, die in die Menge der reellen Zahlen abbilden, und es gelte $D := D(f) \cap D(g) \ne \emptyset$. Dann gelte für beliebige Elemente $x \in D$:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$
$$(f - g)(x) := f(x) - g(x),$$

$$(f.g)(x) := f(x).g(x),$$
$$(f:g)(x) := f(x):g(x), \quad g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D.$$

B. 10.

Aus der Definition D. 17. der Verkettung von zwei Abbildungen lässt sich ableiten, wie die Hintereinanderausführung bzw. Verkettung zweier Funktionen erklärt ist. Es seien nämlich f und g Funktionen mit $W(f) \subseteq D(g)$. Dann ist nach Definition D. 17.

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in D(f).$$

BS. 18.

1. Die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$ sollen hintereinander ausgeführt werden. Es ergibt sich die verkettete Funktion

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = \sin x^2, \quad x \in \boldsymbol{R}^1.$$

2. Es seien $f(x) = 3x + 1$ und $g(x) = x^2$. Dann ergibt sich für die verkettete Funktion

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1.$$

D. 22. (*Relation*)

Eine Abbildung $R \subseteq AxA$ heißt auch *zweistellige Relation* in der Menge A. Man schreibt statt $(a,b) \in R$ für Relationen auch $a\ R\ b$ und sagt „a steht zu b in der Relation R“.

BS. 19.

Es sei $A = \{1,\ 2,\ 3\}$.

a) Die Kleinrelation zwischen den Elementen von A wird beschrieben durch

$$R_1 = \{(1,2),(1,3),(2,3)\},$$

d.h. für $a,b \in A$ bedeutet $a\ R_1\ b$, dass $a < b$ ist.

b) Die Gleichheitsrelation zwischen den Elementen von A wird beschrieben durch

$$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\},$$

d.h. für $a,b \in A$ bedeutet $a\ R_2\ b$, dass $a = b$ ist.

B. 11.

Hat die Menge A unendlich viele Elemente, so ist es i.a. nicht möglich, die Relation durch Aufzählung aller geordneten Paare anzugeben. Man interessiert sich dann für Eigenschaften der Relationen:

D. 23. (*Eigenschaften von Relationen*)

Es sei A eine Menge und $R \subseteq AxA$ eine Relation in A. Dann heißt R

- *reflexiv*, falls $x\ R\ x$ für alle $x \in A$,

- *symmetrisch*, falls $x\ R\ y \quad \Rightarrow \quad y\ R\ x$ für alle $x, y \in A$,
- *antisymmetrisch*, falls für alle $x, y \in A$ gilt $[x\ R\ y \ \wedge \ y\ R\ x] \ \Rightarrow \ x = y$,
- *transitiv*, falls für alle $x, y, z \in A$ gilt $[x\ R\ y \ \wedge \ y\ R\ z] \ \Rightarrow \ x\ R\ z$.

BS. 20.
Es sei $A = \boldsymbol{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen.

a) Es gelte $x\ R\ y \ \Leftrightarrow \ x \le y$. Diese Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, denn

$x \le x, \ \forall x \in \boldsymbol{N}$ (reflexiv),
$(x \le y \ \wedge \ y \le x) \ \Rightarrow \ x = y, \ \forall x, y \in \boldsymbol{N}$ (antisymmetrisch),
$(x \le y \ \wedge \ y \le z) \ \Rightarrow \ x \le z, \ \forall x, y, z \in \boldsymbol{N}$ (transitiv).

b) Es gelte $x\ R\ y \ \Leftrightarrow \ x < y$. Diese Relation ist nicht reflexiv, nicht symmetrisch, aber antisymmetrisch und transitiv. Es gilt:

$$(x < y \ \wedge \ y < z) \ \Rightarrow \ x < z, \ \forall x, y, z \in \boldsymbol{N} \quad \text{(transitiv).}$$

Bei der Überprüfung der Antisymmetrie nutze man die Wahrheitswerttabelle der Implikation. Es gibt nämlich keine zwei natürlichen Zahlen x, y, für die $x < y$ und $y < x$ ist, d. h. die Voraussetzung der Implikation hat stets den Wahrheitswert *falsch*, damit ist die gesamte Implikation wahr und somit ist die Relation < antisymmetrisch.

c) Es gelte $x\ R\ y$ genau dann, wenn x ein Teiler von y ist. Diese Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

d) Es gelte $x\ R\ y$ genau dann, wenn $x = y$ ist. Diese Relation ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

D. 24. (*Äquivalenzrelation*)
Es sei $R \subseteq AxA$ eine Relation in einer Menge A. Die Relation R heißt *Äquivalenzrelation*, falls sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

BS. 21.
In den folgenden Beispielen sind Äquivalenzrelationen angegeben. Der Leser überzeuge sich davon, dass sie tatsächlich reflexiv, transitiv und symmetrisch sind:

a) Es sei A_1 die Menge der reellen Zahlen und für $x, y \in A_1$ gelte $x\ R_1\ y \ \Leftrightarrow \ x = y$.

b) Es sei A_2 die Menge aller Menschen, und es gelte $x\ R_2\ y$ genau dann, wenn Mensch x und Mensch y gleichgroß sind.

c) Es sei A_3 die Menge aller Geraden in der Ebene, und es gelte $x\ R_3\ y$ genau dann, wenn die Geraden x und y parallel sind.

d) Es sei A_4 die Menge aller Dreiecke in der Ebene, und es gelte $x\ R_4\ y$ genau dann, wenn die Dreiecke x und y ähnlich sind.

D. 25. (***Äquivalenzrelation***)
Es sei $R \subseteq AxA$ eine Äquivalenzrelation in einer Menge A und $a \in A$ ein beliebiges Element dieser Menge. Dann heißt die Menge

$$A(a) := \{b \in A \mid a\ R\ b\}$$

Äquivalenzklasse von a.
Man kann also zu jedem Element $a \in A$ die zugehörige Äquivalenzklasse bilden und erhält eine Zerlegung der Menge A in Klassen äquivalenter Elemente. Wählt man ein beliebiges Element einer Äquivalenzklasse, so heißt diese Element *Repräsentant* dieser Äquivalenzklasse.

BS. 22.
Es sei $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, 7,\ 8, 9, 10\}$. Man betrachte die folgende Äquivalenzrelation:
$x\ R\ y$ genau dann, wenn x und y bei der Division durch 3 den gleichen Rest lassen. Die Zahlen 3 und 6 stehen also in dieser Relation , denn sie lassen bei der Division durch 3 beide den Rest 0, die Zahlen 3 und 4 stehen dagegen nicht in dieser Relation.
Man kann hier die folgenden Äquivalenzklassen bilden:

$A(1) = \{1, 4, 7, 10\}$ (Menge aller Zahlen aus A, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen).

$A(2) = \{2, 5, 8\}$ (Menge aller Zahlen aus A, die bei der Division durch 3 den Rest 2 lassen).

$A(3) = \{3, 6, 9\}$ (Menge aller durch 3 teilbaren Zahlen aus A).

Es gelten die Beziehungen:

$$A(1) \cup A(2) \cup A(3) = A$$

und

$$A(1) \cap A(2) = A(1) \cap A(3) = A(2) \cap A(3) = \emptyset,$$

d. h. die Mengen $A(1),\ A(2),\ A(3)$ bilden eine Zerlegung der Ausgangsmenge A.

D. 26. (***Schwache Ordnungsrelation***)
Es sei $R \subseteq AxA$ eine Relation in einer Menge A. Die Relation R heißt *schwache Ordnungsrelation*, falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

BS. 23.
1. Die Relation „$\leq$“ (in der Menge der reellen Zahlen), „nicht größer als“ (in der Menge der Menschen) und „Teilmenge von“ (in der Menge der Kreisflächen in der Ebene) sind schwache Ordnungsrelationen.

2. Es seien $A = \{a,\ b,\ c\}$ und $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,c)\}$.

Diese Relation ist reflexiv, denn es gilt: $(x,x) \in R$ für alle $x \in A$

Sie ist antisymmetrisch, denn für alle $x, y \in A$: Wenn $(x,y) \in R$ und $(y,x) \in R$, so $x = y$.

Sie ist transitiv, denn für alle $x, y, z \in A$: Wenn $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$, so $(x,z) \in R$

Folglich ist R eine schwache Relation in A.

D. 27. (***Starke Ordnungsrelation***)
Es sei $R \subseteq AxA$ eine Relation in einer Menge A. Die Relation R heißt *starke Ordnungsrelation*, falls sie nicht reflexiv, nicht symmetrisch wohl aber transitiv ist.

BS. 24.
1. Die Relation „$<$" (in der Menge der reellen Zahlen), „leichter" (in der Menge der Menschen) und „höher" (in der Menge der Berge) sind starke Ordnungsrelationen.

2. Es sei $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ und $R = \{(1,\ 3),(1,\ 4),(2,\ 4)\}$.

Diese Relation ist nicht reflexiv (denn z. B. $(1,\ 1) \notin R$) und nicht symmetrisch (denn es ist zwar $(1,\ 3) \in R$, aber $(3,\ 1) \notin R$).

Sie ist transitiv, denn es gibt keine Elemente $x, y, z \in A$, so dass $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$.

Somit ist die bei der Transitivität zu untersuchende Implikation wahr, weil die zugehörige Voraussetzung den Wahrheitswert F hat.

Folglich ist diese Relation eine starke Ordnungsrelation.

B. 12.
Man kann mit Hilfe einer starken Ordnungsrelation die Elemente einer Menge der Reihe nach ordnen. Bei einer schwachen Ordnungsrelation ist auch zugelassen, dass einige Elemente der Menge äquivalent zueinander sind., diese sind dann gleichwertig und können untereinander nicht geordnet werden. Eine Äquivalenzrelation dagegen ermöglicht überhaupt keine Ordnung der Elemente einer Menge, sondern liefert eine Zerlegung der Menge in Klassen äquivalenter Elemente.

(Letzte Aktualisierung: 20.09.05)