

# Formelsammlung

## Stochastik

$$P(E) := \frac{k}{n} = \frac{\text{Anzahl der 'günstigen' Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}.$$

### **Additionssatz**

Seien  $A$  und  $B$  zwei beliebige Ereignisse. Dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### **Bedingte Wahrscheinlichkeit**

$$P(A/B) := \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, & \text{falls } P(B) > 0 \\ 0, & \text{falls } P(B) = 0 \end{cases}$$

### **Multiplikationssatz für beliebige Ereignisse**

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

Spezialfall: unabhängige Ereignisse

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{Seien } E_i, i = 1, 2, \dots, n, \text{ unabhängige Ereignisse.}$$

Dann gilt:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(E_i)).$$

### **Totale Wahrscheinlichkeit:**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$

### **Bayes**

$$P(B_i/A) = \frac{P(A/B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

## Auswahlschemata

1. ohne Zurücklegen:

$$P_{\text{ohne Zurücklegen}} = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

2. mit Zurücklegen

$$P_{\text{mit Zurücklegen}} = \binom{n}{m} \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

$$\frac{M}{N} =: p, \quad q := 1 - p$$

## Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq x_1 \\ \sum_{i=1}^k p_i & \text{for } x_k < x \leq x_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{for } x > x_n \end{cases}$$

## Einige Eigenschaften der Verteilungsfunktion $F(x)$ :

1.

$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

2.

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$$

3.

$$\forall x_1, x_2 : x_1 < x_2 \Rightarrow P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

4.

$$x \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x) \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow F(x) \rightarrow 1.$$

5.

$F(x)$  ist mindestens linksseitig stetig und hat eine endliche Anzahl von Sprungstellen.

## Wahrscheinlichkeitsfunktion

$x_i$	$x_1$	$x_2$	...	$x_n$
$p_i = P(X = x_i) = f(x_i)$	$p_1$	$p_2$	...	$p_n$

### **Dichtefunktion**

Sei  $F(x)$  eine differenzierbare Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariable  $X$ . Die Funktion

$$f(x) := F'(x)$$

heißt die *Dichtefunktion* von  $X$ .

### **Wichtige Eigenschaften einer Dichtefunktion**

1.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X < x) \\ &= P(-\infty < X < x) \\ &= \int_{-\infty}^x f(t) dt. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P(a \leq X < b) &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

3.

$$P(-\infty < X < +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

### **Erwartungswert**

Als *Erwartungswert* einer Zufallsgröße  $X$  bezeichnet man:

$$E(X) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

### **Varianz bzw. Dispersion**

$$D^2(X) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 \cdot p_i & \text{falls } X : \text{ discrete} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx & \text{falls } X : \text{ stetig} \end{cases}$$

bzw.

$$D^2(X) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot p_i - \left( \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i \right)^2, & \text{falls } X \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \right)^2, & \text{falls } X \text{ stetig} \end{cases}$$

### **Standardabweichung**

$$D(x) > 0$$

### **Hypergeometrische Verteilung**

$$P(X = x) = p_i = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0, 1, \dots, n; \quad n \leq M \leq N.$$

$$E(X) = n \cdot p$$

$$D^2(X) = \frac{N-n}{N-1} n \cdot p \cdot q$$

### **Binomialverteilung**

$$P(X = x) = p_i = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

$$E(X) = n \cdot p,$$

$$D^2(X) = n \cdot p \cdot q.$$

“Gilt  $10 \cdot n \leq N$ , so kann die hypergeometrische Verteilung durch die Binomialverteilung approximiert werden.“

### **Poisson-Verteilung**

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

$$E(X) = D^2(X) = n \cdot p = \lambda.$$

“Für

$$n \cdot p \leq 10 \quad \text{und} \quad n \geq 1500p,$$

kann die Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung approximiert werden.“

### **Normalverteilung**

Eine stetige Zufallsgröße  $X$  sei als *normalverteilt* bezeichnet, wenn sie folgende *Wahrscheinlichkeitsdichte* besitzt:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^1$$

Eine normalverteilte Zufallsgröße  $X$  hat die *Verteilungsfunktion*

$$\begin{aligned} F(x; \mu, \sigma) &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

$$E(X) = \mu,$$

$$D^2(X) = \sigma^2.$$

### **Standardisierte Normalverteilung**

Wegen

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \text{mit} \quad E(Z) = 0, \quad D^2(Z) = 1$$

erhält man folgende Funktionen:

1. Die *Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung*:

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

2. Die *standardisierte Verteilungsfunktion der Normalverteilung*:

$$\begin{aligned} F(x) &= \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

$$\varphi(-x; 0, 1) = \varphi(x; 0, 1),$$

$$\Phi(-x; 0, 1) = 1 - \Phi(x; 0, 1).$$

$$P(|X - \mu| < c) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right) - 1, \quad c \in \mathbb{R}^1.$$

### ***Dreisigma*regel**

$$P(|X - \mu| < \sigma) = 0.6828$$

$$P(|X - \mu| < 2\sigma) = 0.9544$$

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) = 0.9972.$$

Dies bedeutet:

Etwa 68% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ :

Etwa 95% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ :

Etwa 99.7% aller Beobachtungswerte liegen im Intervall  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ :