Lineare Algebra in der Ökonomie

Teil II

(Lösungen)

2. 1.
Seien x_i, $i = 1, 2, 3$: die unbekannten Preise.
Das Modell lautet dann:

$$\begin{aligned}
300x_1 + 450x_2 + 150x_3 &= 33000 \\
400x_1 + 300x_2 + 300x_3 &= 40000 \\
500x_1 + 375x_2 + 250\,x_3 &= 43750 \\
x_i \geq 0, \quad i &= 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Dividieren wir alle Gleichungen durch 50, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
6x_1 + 9x_2 + 3x_3 &= 660 \\
8x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 800 \\
10x_1 + 7.5x_2 + 5\,x_3 &= 875
\end{aligned}$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
6	9	3	660
8	6	6	800
10	$\frac{15}{2}$	5	875
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	110
0	-6	2	-80
0	$-\frac{15}{2}$	0	-225
1	0	1	90
0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{40}{3}$
0	0	$-\frac{5}{2}$	-125
1	0	0	40
0	1	0	30
0	0	1	50

$x_1 = 40, \qquad x_2 = 30, \qquad x_3 = 50$

2. 2.

Sei $x_i, \quad i = 1, 2, 3$: die Erzeugnismenge i.

Das Modell lautet:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 51 \\ x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &= 48 \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 &= 44 \end{aligned} \qquad x_i \geq 0: \quad i = 1, 2, 3.$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
2	1	2	51
1	2	1	48
2	0	3	44
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{51}{2}$
0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{45}{2}$
0	-1	1	-7
1	0	1	18
0	1	0	15
0	0	1	8
1	0	0	10
0	1	0	15
0	0	1	8

$x_1 = 10, \qquad x_2 = 15, \qquad x_3 = 8$

2. 3.

Sei $x_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$: Anzahl des Erzeugnisses i.
Das Modell lautet:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 85 \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 85 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 &= 85 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 4x_4 &= 85 \end{aligned}, \qquad x_i \geq 0: \text{ ganz}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
2	3	4	2	85
6	1	2	1	85
1	3	6	3	85
3	1	8	4	85
1	$\frac{3}{2}$	2	1	$\frac{85}{2}$
0	-8	-10	-5	-170
0	$\frac{3}{2}$	4	2	$\frac{85}{2}$
0	$-\frac{7}{2}$	2	1	$-\frac{85}{2}$
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{85}{8}$
0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{85}{4}$
0	0	$\frac{17}{8}$	$\frac{17}{16}$	$\frac{85}{8}$
0	0	$\frac{51}{8}$	$\frac{51}{16}$	$\frac{255}{8}$
1	0	0	0	10
0	1	0	0	15
0	0	1	$\frac{1}{2}$	5
0	0	0	0	0

1.

$$x_1 = 10,\quad x_2 = 15,\quad x_3 = 5 - \frac{1}{2}x_4,\quad \text{bzw.}\, x_4 = 10 - 2x_3 \geq 0,\quad \text{d.h. } 0 \leq x_3 \leq 5$$

2.

$$x_1 = 10, \qquad x_2 = 15, \qquad x_3 = 5, \qquad x_4 = 0$$

2. 4.

Sei x_i, $i = 1, 2, 3$: Anzahl der Reparaturen der Art R_i.
Das Modell lautet dann:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 40 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 40 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 34 \\ x_i \geq 0: \text{ ganz}, \quad i &= 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
2	4	0	40
3	3	2	40
2	3	1	34
1	2	0	20
0	-3	2	-20
0	-1	1	-6
1	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$
0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	0	0	4
0	1	0	8
0	0	1	2

$x_1 = 4, \quad x_2 = 8, \quad x_3 = 2$

2. 5.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 60 & 60 & 70 \\ 72 & 84 & 84 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4900 & 4690 & 5530 \\ 5180 & 5040 & 5670 \\ 6300 & 6468 & 7140 \end{pmatrix}$$

und X die gesuchte Matrix. Dann gilt

$$X = A^{-1} \cdot B$$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
50	60	70	1	0	0
60	60	70	0	1	0
72	84	84	0	0	1
1	$\frac{6}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{50}$	0	0
0	-12	-14	$-\frac{6}{5}$	1	0
0	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{84}{5}$	$-\frac{36}{25}$	0	1
1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0
0	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{12}$	0
0	0	-14	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0
0	1	0	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{12}$
0	0	1	$\frac{6}{70}$	$\frac{1}{70}$	$-\frac{1}{14}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{12} \\ \frac{6}{70} & \frac{1}{70} & -\frac{1}{14} \end{pmatrix}; \qquad X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 28 & 35 & 14 \\ 7 & 35 & 28 \\ 44 & 12 & 45 \end{pmatrix}.$$

2. 6.
Sei

$$M_{RZ} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{RP} := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 11 & 17 & 16 \\ 16 & 20 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun

$$M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

Multipliziert man nun die obige Gleichung von links mit M_{RZ}^{-1}, so erhält man:

$$M_{ZP} = M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RP}$$

Gesucht ist also die Matrix M_{RZ}^{-1}:

2	0	1	1	0	0
1	2	3	0	1	0
0	4	0	0	0	1
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
0	4	0	0	0	1
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	-5	1	-2	1
1	0	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
0	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$
0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Damit ist.

$$M_{RZ}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

und

$$M_{ZP} = M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RP} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 11 & 17 & 16 \\ 16 & 20 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. 7.
Sei

$$M_{ZP} := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_{RP} := \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 19 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun

$$M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

Multipliziert man nun die obige Gleichung von rechts mit M_{ZP}^{-1}, so erhält man:

$$M_{RZ} = M_{RP} \cdot M_{ZP}^{-1}$$

Gesucht ist also die Matrix M_{ZP}^{-1}:

Gauß-Jordan-Tableau

2	2	1	1	0	0
5	2	3	0	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1	0
0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{3}$	0
0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
1	0	0	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
0	1	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
0	0	1	1	0	-2

Damit ist.

$$M_{ZP}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und

$$M_{ZP} = M_{RP} \cdot M_{ZP}^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 19 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. 8.

1.

Sei

x_i: die Produktionsmenge E_i, $i = 1, 2, 3$.

Das Modell:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 100 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 200 \\ 9x_1 + 14x_2 + 6x_3 &= 500 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.

Gauß-Jordan-Tableaufolge

x_1	x_2	x_3	x_0
1	2	2	100
4	6	2	200
9	14	6	500
1	2	2	100
0	-2	-6	-200
0	-4	-12	-400
1	0	-4	-100
0	1	3	100
0	0	0	0

$$x_1 = -100 + 4x_3 \geq 0$$
$$x_2 = 100 - 3x_3 \geq 0$$

d. h.

$$25 \leq x_3 \leq \frac{100}{3}$$

3.

Nein, denn $55 \notin \left[25, \ {}^{100}\!/_{3}\right]$

2. 9.

Sei

x_i, $i = 1, 2, 3, 4$: die Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 16 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 16 \qquad x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 16 \end{aligned}$$

Gauß-Jordan-Tableaufolge

x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
4	2	2	6	16
4	1	3	7	16
3	3	2	5	16
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	4
0	-1	1	1	0
0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
1	0	1	2	4
0	1	-1	-1	0
0	0	2	2	4
1	0	0	1	2
0	1	0	0	2
0	0	1	1	2

Aus

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad x_4 &= 2 \\ x_2 \qquad\qquad &= 2\,, \qquad x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} &x_1 = 2 - x_4 \geq 0 \\ &x_2 = 2 \\ &x_3 = 2 - x_4 \geq 0\,, \quad x_4 \geq 0\,, \end{aligned}$$

und hieraus

$$0 \leq x_4 \leq 2$$

2. 10.
Sei

$x_i,\ i=1,\ 2,\ 3$: die Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$\begin{aligned} 3x_2 + 4x_3 &= 60 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 90 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 130 \\ x_1 + 4x_2 &= 100 \\ x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3 & \end{aligned}$$

Gauß-Jordan-Tableaufolge

x_1	x_2	x_3	x_0
2	1	5	90
0	3	4	60
5	1	3	130
1	4	0	100
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	45
0	3	4	60
0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{19}{2}$	-95
0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{5}{2}$	55
1	0	$\frac{11}{6}$	35
0	1	$\frac{4}{3}$	20
0	0	$-\frac{15}{2}$	-65
0	0	$-\frac{43}{6}$	-15
1	0	0	$\frac{344}{18}$
0	1	0	$\frac{76}{9}$
0	0	1	$\frac{26}{3}$
0	0	0	$\frac{848}{18}$

Aus der letzten Zeile des letzten Tableaus folgt, dass das Gleichungssystem einen Widerspruch enthält. Daher gibt es *kein* zulässiges Produktionsprogramm.

2. 11.

1.

Sei

$x_i,\ i=1,\ 2,\ 3$: die Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad +3x_2 + 30x_3 &= 210 \\ 5x_2 + 80x_3 &= 450 \\ 0.5x_1 + 1.5x_2 + 7.0x_3 &= 60 \end{aligned} \qquad x_i \geq 0,\ i=1,\ 2,\ 3$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
2	2	30	210
0	5	80	450
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	7	60
1	1	15	105
0	**5**	80	450
0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$
1	0	-1	15
0	1	16	90
0	0	$-\frac{33}{2}$	$-\frac{165}{2}$
1	0	0	20
0	1	0	10
0	0	1	5

$x_1 = 20,\quad x_2 = 10,\quad x_3 = 5$

2.
Die Gesamtkosten: $K = 20 \cdot 8 + 10 \cdot 12 + 5 \cdot 172 = 1140$ €

2. 12.
Sei

$x_i,\ i = 1,\ 2,\ 3$: die Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 130 \\ x_2 + x_3 &= 80 \\ x_1 \qquad + x_3 &= p \end{aligned} \qquad x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3; \quad p > 0.$$

Gauß-Jordan-Tableau

x_1	x_2	x_3	x_0
1	2	1	130
0	1	1	80
1	0	1	p
1	2	1	130
0	**1**	1	80
0	-2	0	$-130 + p$
1	0	-1	-30
0	1	1	80
0	0	**2**	$30 + p$
1	0	0	$-15 + \frac{p}{2}$
0	1	0	$65 - \frac{p}{2}$
0	0	1	$15 + \frac{p}{2}$

$$\begin{cases} -15+\frac{p}{2}\geq 0 \\ 65-\frac{p}{2}\geq 0 \\ 15+\frac{p}{2}\geq 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 30\leq p\leq 130$$

2. 13.
Sei

$x_i,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4$: die Gütermenge G_i.

Das Modell:

$$\begin{aligned} 2x_1 \quad + x_2 + 0.5x_3 \quad + 2x_4 &= 10000 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad + x_3 + 2.5x_4 &= 15000 \qquad\qquad x_i\geq 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ 2x_1 \qquad\quad +5x_3 \ \ +10x_4 &= 24000 \end{aligned}$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
2	1	$\frac{1}{2}$	2	10000
3	2	1	$\frac{5}{2}$	15000
2	0	5	10	24000
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	5000
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0
0	-1	$\frac{9}{2}$	8	14000
1	0	0	$\frac{3}{2}$	5000
0	1	$\frac{1}{2}$	-1	0
0	0	**5**	7	14000
1	0	0	$\frac{3}{2}$	5000
0	1	0	$-\frac{17}{10}$	-1400
0	0	1	$\frac{7}{5}$	2800

$$x_1 = 5000 - \frac{3}{2}x_4 \geq 0$$
$$x_2 = -1400 + \frac{17}{10}x_4 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{14000}{17} \leq x_4 \leq 2000\,.$$
$$x_3 = 2800 - \frac{7}{5}x_4 \geq 0$$

Es gibt also unendlich viele zulässige Produktionsprogramme falls für die Produktion von G_4 die Bedingung $\frac{14000}{17} \leq x_4 \leq 2000$ gilt.

2. 14.

Sei

$x_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$: die Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 &= 120 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 100 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 130 \end{aligned} \qquad x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

Gauß-Jordan-Tableaufolge

x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
3	6	3	6	120
1	4	5	6	100
2	5	6	8	130
1	2	1	2	40
0	2	4	4	60
0	1	4	4	50
1	0	-3	-2	-20
0	1	2	2	30
0	0	2	2	20
1	0	0	1	10
0	1	0	0	10
0	0	1	1	10

Aus

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\quad x_4 &= 10 \\ x_2 \qquad\qquad &= 10, \qquad x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} &x_1 = 10 - x_4 \geq 0 \\ &x_2 = 10 \\ &x_3 = 10 - x_4 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

und hieraus

$$0 \leq x_4 \leq 10.$$

2. 15.

Sei

$x_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$: die Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 130 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 100 \qquad\qquad x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_3 + 2x_4 &= 40 \end{aligned}$$

Gauß-Jordan-Tableaufolge

x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
2	5	6	8	120
1	4	5	6	100
1	2	1	2	40
1	$\frac{5}{2}$	3	4	65
0	$\frac{3}{2}$	2	2	35
0	$-\frac{1}{2}$	-2	-2	-25
1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$
0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{70}{3}$
0	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{40}{3}$
1	0	0	1	10
0	1	0	0	10
0	0	1	1	10

Aus

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad x_4 &= 10 \\ x_2 \quad\quad\quad &= 10, \quad x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} &x_1 = 10 - x_4 \geq 0 \\ &x_2 = 10 \\ &x_3 = 10 - x_4 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

und hieraus

$$0 \leq x_4 \leq 10.$$

(Letzte Aktualisierung: 20.03.2014)