

Lineare Algebra in der Ökonomie

Teil I

(Lösungen)

1. 1.

1.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{Die Matrix der alten Lagerbestände}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{Die Matrix der Lieferungen}$$

$$C := A + B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 10 \\ 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \quad \text{Die Matrix der neuen Lagerbestände (am 06.06.)}$$

2.

Sei

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{Die Matrix der Auslieferungen.}$$

Dann gilt für die Matrix der neuen Lagerbestände

$$F := C - D = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 10 \\ 6 & 6 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. 2.

Sei

L_a : die Matrix der ursprünglichen Lagerbestände

L_n : die Matrix der neuen Lagerbestände

Z : die Matrix der Zugänge

A : die Matrix der Abgänge

Dann gilt. $L_a = L_n - Z + A$:

$$L_a = \begin{pmatrix} 200 & 150 & 190 \\ 210.5 & 197.8 & 202.6 \\ 230.5 & 205.9 & 301.6 \\ 198.5 & 210.6 & 256.8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 & 25 & 37 \\ 31 & 18 & 27 \\ 26 & 30 & 29 \\ 18 & 25 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 22 & 41 \\ 37 & 24.8 & 31.8 \\ 41.4 & 39.4 & 34.6 \\ 25.7 & 40.9 & 36.8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 & 147 & 194 \\ 216.5 & 204.6 & 207.4 \\ 245.9 & 215.3 & 307.2 \\ 206.2 & 226.5 & 276.6 \end{pmatrix}$$

1. 3.

Der Bruttopreis beträgt also 116% des Nettopreises, so dass man die folgende Gleichung erhält:

$$P_B = 1.16 \cdot P_N$$

mit

P_B : der Bruttopreis

P_N : der Nettopreis

$$P_B = 1.16 \cdot \begin{pmatrix} 1500 & 1000 & 2000 & 3000 \\ 1600 & 1200 & 1900 & 2600 \\ 2400 & 1000 & 1600 & 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1740 & 1160 & 2320 & 3480 \\ 1856 & 1392 & 2204 & 3016 \\ 2784 & 1160 & 1856 & 4640 \end{pmatrix}$$

1. 4.

$$\begin{pmatrix} 30 & 40 & 20 \\ 35 & 45 & 25 \\ 25 & 50 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 260 \\ 216 \end{pmatrix}$$

1. 5.

$$\begin{pmatrix} 400000 & 800000 & 400000 \\ 300000 & 700000 & 500000 \\ 400000 & 750000 & 800000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.10 & 0.05 \\ 0.01 & 0.005 \\ 0.003 & 0.001 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49200 & 24400 \\ 38500 & 19000 \\ 49900 & 24550 \end{pmatrix}$$

1. 6.

$$\begin{pmatrix} 15 & 20 & 30 & 40 \\ 16 & 18 & 25 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 12 & 14 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 570 & 580 & 600 \\ 582 & 582 & 621 \end{pmatrix}$$

1. 7.

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 0 & 4 \\ 10 & 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 24 \\ 65 \end{pmatrix} ;$$

2.

$$\begin{pmatrix} 29 & 24 & 65 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} = 6260 \text{ €}$$

1. 8.

1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 8 & 17 \\ 23 & 34 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 11 & 19 \\ 8 & 17 \\ 23 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139 \\ 117 \\ 262 \end{pmatrix};$$

3.

$$(139 \quad 117 \quad 262) \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 3200 \\ 4000 \end{pmatrix} = 1839400 \text{ €}$$

1. 9.

$$\begin{pmatrix} 20 & 20 & 10 & 15 \\ 10 & 12 & 5 & 5 \\ 10 & 12 & 6 & 5 \\ 15 & 15 & 10 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ 800 \\ 250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20150 \\ 10050 \\ 10850 \\ 16800 \end{pmatrix}$$

$$(20150 \quad 10050 \quad 10850 \quad 16800) \cdot \begin{pmatrix} 0.70 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.90 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.90 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.80 \end{pmatrix} = (14105 \quad 9045 \quad 9765 \quad 13440)$$

1. 10.

1.

Sei

$$M_{TB} := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p := \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

$$t = M_{TB} \cdot M_{BE} \cdot p = (2800 \quad 3250 \quad 2750 \quad 2300)^T$$

2.

$$b = M_{BE} \cdot p = \begin{pmatrix} 450 \\ 700 \\ 700 \end{pmatrix}, \quad b_n := b + 0.10 \cdot b = \begin{pmatrix} 495 \\ 770 \\ 770 \end{pmatrix}$$

$$t_n := M_{TB} \cdot b_n = (3080 \quad 3575 \quad 3025 \quad 2530)^T$$

1. 11.

1.
Sei

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 8 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad M_{HR} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 20 & 50 \\ 15 & 30 & 20 & 60 \end{pmatrix}.$$

$$M_{PH} = M_{RP}^T \cdot M_{HR}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 20 & 30 \\ 20 & 20 \\ 50 & 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 410 & 490 \\ 300 & 365 \\ 500 & 620 \end{pmatrix}$$

	Rohstoffkosten	
	1. Halbjahr	2. Halbjahr
P_1	410	490
P_2	300	365
P_3	500	620

2.

$$M_{VP} = 1.2 \cdot M_{PH} = \begin{pmatrix} 492 & 588 \\ 360 & 438 \\ 600 & 744 \end{pmatrix}$$

	Verkaufspreis	
	1. Halbjahr	2. Halbjahr
P_1	492	588
P_2	360	438
P_3	600	744

3.

$$M_{G/\text{Stück},H} = \begin{pmatrix} 492 & 588 \\ 360 & 438 \\ 600 & 744 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 410 & 490 \\ 300 & 365 \\ 500 & 620 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 98 \\ 60 & 73 \\ 100 & 124 \end{pmatrix}$$

$$(82 \quad 60 \quad 100) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{pmatrix} = 37200 \text{ GE}; \quad (98 \quad 73 \quad 124) \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 180 \\ 250 \end{pmatrix} = 55900 \text{ GE}$$

Gewinn	
1. Halbjahr	2. Halbjahr
37200	55900

1. 12.

1.
Sei

$$M_{TH} := \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 7 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}; \quad M_{TF} := \begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$M_{FH} = M_{TF}^T \cdot M_{TH} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 \\ 20 & 18 & 25 \\ 16 & 12 & 8 \\ 7 & 9 & 5 \\ 17 & 21 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 7 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 146 & 139 \\ 526 & 496 \\ 260 & 260 \\ 158 & 155 \\ 388 & 379 \end{pmatrix}.$$

	1. Halbjahr	2. Halbjahr
Stahl	146	139
Holz	526	496
Glas	260	260
Farbe	158	155
Arbeit	388	379

2.
Sei

$$M_{KF} := \begin{pmatrix} 15 & 8 & 5 & 1 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$M_{HK} = M_{FH}^T \cdot M_{KF}^T = \begin{pmatrix} 146 & 526 & 260 & 158 & 388 \\ 139 & 496 & 260 & 155 & 379 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 8 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11736 & 2720 \\ 11298 & 2622 \end{pmatrix}.$$

	Einkaufskosten	Transportkosten
1. Halbjahr	11736	2720
2. Halbjahr	11298	2622

$$M_{GK,H} = \begin{pmatrix} 11736 & 2720 \\ 11298 & 2622 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14456 \\ 13920 \end{pmatrix}$$

	Gesamtkosten
1. Halbjahr	14456
2. Halbjahr	13920

3.
Sei

$$p := (500 \quad 700 \quad 800).$$

$$G_H = p \cdot M_{TH} - M_{GK,H} = (500 \quad 700 \quad 800) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 7 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14456 \\ 13920 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2544 \\ 1980 \end{pmatrix}$$

	Gewinn
1. Halbjahr	2544
2. Halbjahr	1980

1. 13.
1.
Sei

$$M_{MP} := \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad M_{PR} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad p_P := \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad k_R := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad k_V := \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$M_{MA} = M_{MP} \cdot p_P = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 760 \\ 660 \\ 780 \end{pmatrix}.$$

Monat	Umsatz
Januar	760
Februar	660
März	780

2.

$$M_{MR} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 26 & 52 \\ 9 & 27 & 54 \\ 2 & 25 & 50 \end{pmatrix}.$$

	Rohstoffverbrauch		
	R_1	R_2	R_3
Januar	4	26	52
Februar	9	27	54
März	2	25	50

$$M_{RK} = \begin{pmatrix} 4 & 26 & 52 \\ 9 & 27 & 54 \\ 2 & 25 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 432 \\ 468 \\ 408 \end{pmatrix}$$

Monat	Rohstoffkosten
Januar	432
Februar	468
März	406

3.

$$M_{VK} = M_{MP}^T \cdot k_v = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 9 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 66 \\ 59 \end{pmatrix}.$$

Monat	Verarbeitungskosten
Januar	62
Februar	66
März	59

4.

$$g_M = \begin{pmatrix} 760 \\ 660 \\ 780 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 432 \\ 468 \\ 406 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 62 \\ 66 \\ 59 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 166 \\ 26 \\ 215 \end{pmatrix}.$$

Monat	Gewinn
Januar	166
Februar	26
März	215

1. 14.

Sei

$$M_{QP} = \begin{pmatrix} 40 & 10 \\ 30 & 30 \\ 20 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}, \quad M_{ME} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{EP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

$$M_{QE} = M_{QP} \cdot M_{EP}^T = \begin{pmatrix} 40 & 10 \\ 30 & 30 \\ 20 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 90 \\ 90 & 90 & 90 \\ 60 & 60 & 60 \\ 70 & 90 & 50 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M_{QM} = M_{QE} \cdot M_{ME}^T = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 90 \\ 90 & 90 & 90 \\ 60 & 60 & 60 \\ 70 & 90 & 50 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 & 390 \\ 450 & 630 \\ 300 & 420 \\ 350 & 510 \end{pmatrix}.$$

1. 15.

1.

Sei

$$M_{RP} := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M_{ZP} := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.

$$M - M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP},$$

$$(M - M_{RP})M_{ZP}^{-1} = M_{RZ},$$

$$M_{ZP}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$M_{RZ} = \frac{1}{15} \left[\begin{pmatrix} 12 & 11 \\ 21 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

1. 16.

1.
Sei

$$M_{RP} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{RZ} := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.

$$M - M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP},$$

$$M_{RZ}^{-1} \cdot (M - M_{RP}) = M_{ZP},$$

$$M_{RZ}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$M_{ZP} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(Letzte Aktualisierung: 14.03.2014)