

# Lineare Algebra in der Ökonomie

## Teil II

### (Aufgaben)

#### 2. 1.

Eine Textilhandlung rechnet für bestimmte Sorten von Jeans, Blusen und Röcken mit folgenden Absatzmengen in den Monaten Mai, Juni und Juli:

	Mai	Juni	Juli
Jeans	300	400	500
Blusen	450	300	375
Röcke	150	300	250

Für den Einkauf der Waren hat die Firma 33000,00 € im Monat Mai, 40000,00 € im Monat Juni und 43750,00 € im Monat Juli zur Verfügung und möchte diese Budgets ausschöpfen. Berechnen Sie die Einkaufspreise (in €) für eine Jeans, eine Bluse und einen Rock.

#### 2. 2.

Zur Herstellung von drei verschiedenen Erzeugnissen E1, E2 und E3 werden drei Ausgangsstoffe R1, R2 und R3 benötigt. Die nachfolgende Tabelle zeigt den Ausgangsstoffverbrauch pro Erzeugniseinheit und die verfügbaren Ausgangsstoffmengen:

	Verbrauch/ME			Menge
R1	2	1	2	51
R2	1	2	1	48
R3	2	0	3	44

Wie viel Erzeugnisse können damit von jeder Sorte produziert werden, wenn alle Ausgangsstoffe voll ausgeschöpft werden?

#### 2. 3.

Ein Unternehmen fertigt vier verschiedene Erzeugnisse auf vier Maschinengruppen:

Maschinen-Gruppe	Arbeitszeitaufwand je Erzeugniseinheit in min/Stck.			
	E1	E2	E3	E4
M1	2	3	4	2
M2	6	1	2	1
M3	1	3	6	3
M4	3	1	8	4

1. Ermitteln Sie die Anzahl der Erzeugnisse, die hergestellt wird, wenn auf jeder Maschine 85 Minuten gearbeitet wird.
2. Geben Sie eine spezielle Lösung an, für die die Anzahl der Erzeugnisse E3 möglichst hoch wird

**2. 4.**

Zwei spezialisierte Arbeiter  $A_1$ ,  $A_2$  sollen in einer Arbeitszeit von 40 Stunden Reparaturen drei verschiedener Arten  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  ausführen. Die für die Arbeiter bei den einzelnen Reparaturen vorgesehenen Einsatzzeiten (einschließlich Wegezeiten) betragen in Stunden:

	$R_1$	$R_2$	$R_3$
$A_1$	2	4	0
$A_2$	3	3	2

Außerdem werden für  $R_1$  2kg, für  $R_2$  3kg und für  $R_3$  1kg eines Materials benötigt, von dem in diesem Zeitraum 34 kg zur Verfügung stehen.

Wie viel Reparaturen der Arten  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  lassen sich durchführen, wenn Zeit und Material voll ausgeschöpft werden?

**2. 5.**

Aus drei Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  werden drei Zwischenprodukte  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  und daraus wiederum drei Endprodukte  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  hergestellt.

Die zur Herstellung je einer Einheit der Zwischenprodukte bzw. der Endprodukte notwendigen Mengeneinheiten der Rohstoffe sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt:

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$		$E_1$	$E_2$	$E_3$
$R_1$	50	60	70	$R_1$	4900	4690	5530
$R_2$	60	60	70	$R_2$	5180	5040	5670
$R_3$	72	84	84	$R_3$	6300	6468	7140

Wie viele Mengeneinheiten der Zwischenprodukte  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  werden jeweils zu Herstellung der Endprodukte  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  benötigt?

**2. 6.**

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  über die Zwischenprodukte die  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  Endprodukte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  her. Die nachfolgenden Tabellen enthalten die bekannten Verflechtungskoeffizienten:

	$Z_1$	$Z_2$	$Z_3$		$P_1$	$P_2$	$P_3$
$R_1$	2	0	1	$R_1$	1	4	8
$R_2$	1	2	3	$R_2$	11	17	16
$R_3$	0	4	0	$R_3$	16	20	4

Bestimmen Sie die Verflechtung zwischen den Zwischenprodukten und den Endprodukten.

**2. 7.**

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  über die Zwischenprodukte die  $Z_1$ ,  $Z_2$  und  $Z_3$  Endprodukte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  her. Die nachfolgenden Tabellen enthalten die bekannten Verflechtungskoeffizienten:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$Z_1$	2	2	1
$Z_2$	5	2	3
$Z_3$	1	1	0

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$R_1$	9	6	5
$R_2$	19	10	9
$R_3$	9	9	2

Bestimmen Sie die Verflechtung zwischen den Rohstoffen und den Zwischenprodukten.

**2. 8.**

Die Erzeugnisse  $E_i, i = 1, 2, 3$ , werden auf den Maschinen  $M_i, i = 1, 2, 3$ , bearbeitet. Die Bearbeitungszeiten je Erzeugniseinheit sowie die zur Verfügung stehenden Maschinenzeiten sind folgender Tabelle zu entnehmen (Angaben in Zeiteinheiten):

	$E_1$	$E_2$	$E_3$	Maschinenzeiten
$M_1$	1	2	2	100
$M_2$	4	6	2	200
$M_3$	9	14	6	500

Es sind Produktionsmengen von  $E_i, i = 1, 2, 3$ , so zu bestimmen, dass die Maschinenzeiten vollständig ausgenutzt werden.

1. Stellen Sie das zugehörige Modell dar.
2. Ermitteln Sie alle ökonomisch sinnvollen Lösungen des Modells unter der Voraussetzung, dass die Produktionsmenge von  $E_3$  variierbar ist.
3. Ist es möglich unter Einhaltung der obigen Bedingungen von  $E_3$  55 Erzeugniseinheiten herzustellen? Begründen Sie Ihre Antwort.

**2. 9.**

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  die Produkte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  her. Die nachfolgende Tabelle enthält den Rohstoffverbrauch pro Produkteinheit:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$R_1$	4	2	2	6
$R_2$	4	1	3	7
$R_3$	3	3	2	5

An Rohstoffen sind je 16 ME vorhanden.

Unter welchen Bedingungen muss produziert werden, damit bei voller Ausnutzung der Rohstoffe die Produktion sinnvoll bleibt. Die Produktionsmenge von  $P_4$  sei variierbar.

**2. 10.**

Ein Betrieb verwendet die Rohstoffe  $R_1, R_2, R_3$  und  $R_4$  zur Herstellung der Produkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$ . Die nachfolgende Tabelle enthält den Rohstoffverbrauch pro Produkteinheit und die verfügbaren Rohstoffmengen:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	Rohstoffmengen
$R_1$	0	3	4	60
$R_2$	2	1	5	90
$R_3$	5	1	3	130
$R_4$	1	4	0	100

Es ist ein *zulässiges* Produktionsprogramm zu ermitteln.

**2. 11.**

In einem Betrieb werden aus zwei Rohstoffen  $R_1, R_2$  die Produkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$  hergestellt. Dazu steht auch eine Maschinengruppe  $M$  zur Verfügung. Die nachfolgende Tabelle enthält pro Produkteinheit den Rohstoffverbrauch und die erforderlichen Bearbeitungszeiten (in Stunden) auf der Maschinengruppe.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$R_1$	2	2	30
$R_2$	0	5	80
$M$	0.5	1.5	7.0

- Bestimmen Sie die Produktionsmengen für die drei Produkte, wenn die vorhandenen Rohstoffe von 210 ( $R_1$ ) und 450 ( $R_2$ ) vollständig verbraucht und die zur Verfügung stehende Maschinenzeit von 60 Stunden voll ausgeschöpft werden soll.
- Wie hoch sind die Gesamtkosten, wenn die zur Herstellung der Produkte folgende Kosten pro Einheit entstehen:  $P_1$  : 8.00 €,  $P_2$  : 12.00 €,  $P_3$  : 172.00 €

**2. 12.**

Ein Betrieb verwendet die Rohstoffe  $R_1, R_2$  und  $R_3$  zur Herstellung der Produkte  $P_1, P_2$  und  $P_3$ . Die nachfolgende Tabelle enthält den Rohstoffverbrauch pro Produkteinheit und die verfügbaren Rohstoffmengen:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	Rohstoffmengen
$R_1$	1	2	1	130
$R_2$	0	1	1	80
$R_3$	1	0	1	$p$

Für welche Parameterwerte  $p$  gibt es ein *zulässiges* Produktionsprogramm?

**2. 13.**

Bei der Produktion von vier Gütern  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  und  $G_4$  treten als Engpässe die Belegung einer Maschine, die zur Verfügung stehende Arbeitszeit und ein Rohstoff auf, der nur in begrenzter Menge beschafft werden kann. Die folgende Tabelle gibt Auskunft über den Bedarf an Maschinenzeit, Arbeitsstunden und Rohstoffeinheiten pro Stück eines jeden der vier Güter:

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
h Maschinenzeit	2	1	0.5	2
h Arbeitszeit	3	2	1	2.5
Rohstoffeinheiten	2	0	5	10

Im betrachteten Zeitraum kann die Maschine höchstens 10000 h laufen, höchstens 15000 Arbeitsstunden können aufgewendet werden, und nur 24000 Einheiten des Rohstoffs können herbeschafft werden.

Bestimmen Sie die Produktionsmengen für die vier Güter, bei denen sowohl die genannte Rohstoffmenge als auch die zur Verfügung stehenden Maschinen- und Arbeitsstunden *voll ausgeschöpft* werden.

**2. 14.**

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  die Produkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$  her. Die nachfolgende Tabelle enthält den Rohstoffverbrauch pro Produkteinheit und die verfügbaren Rohstoffmengen

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	Rohstoffmengen
$R_1$	3	6	3	6	120
$R_2$	1	4	5	6	100
$R_3$	2	5	6	8	130

Unter welchen Bedingungen muss produziert werden, damit bei voller Ausnutzung der Rohstoffe die Produktion sinnvoll bleibt. Die Produktionsmenge von  $P_4$  sei variierbar.

**2. 15.**

Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$  die Produkte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$  her. Die nachfolgende Tabelle enthält den Rohstoffverbrauch pro Produkteinheit und die verfügbaren Rohstoffmengen

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	Rohstoffmengen
$R_1$	2	5	6	8	130
$R_2$	1	4	5	6	100
$R_3$	1	2	1	2	40

Unter welchen Bedingungen muss produziert werden, damit bei voller Ausnutzung der Rohstoffe die Produktion sinnvoll bleibt. Die Produktionsmenge von  $P_4$  sei variierbar.

(Letzte Aktualisierung: 20.03.2014)