

# Lineare Algebra in der Ökonomie

## Teil I

### (Aufgaben)

#### 1. 1.

Ein Motorradhersteller, der die Modelle A, B und C anbietet, hat in seinen beiden Filialen am 05.06. folgende Lagerbestände:

Filiale	Modelle		
	A	B	C
1	3	5	7
2	4	3	6

Am 06.06. werden die beiden Filialen wie folgt beliefert:

Filiale	Modelle		
	A	B	C
1	3	2	3
2	2	3	4

1. Stellen Sie die alten Lagerbestände, die Liefermengen und die neuen Lagerbestände als Matrizen dar.

2. Am 07.06. werden in den beiden Filialen folgende Auslieferungen vorgenommen:

Filiale	Modelle		
	A	B	C
1	2	3	4
2	3	2	3

Bestimmen Sie den neuen Lagerbestand.

#### 1. 2.

Eine Unternehmung der Holzbranche hat nach Lagerbestandsveränderungen (Zu- und Abgänge) folgende Lagerbestände (in  $m^3$ ):

	Filiale 1	Filiale 2	Filiale 3
Eiche	200	150	190
Esche	210,5	197,8	202,6
Pinie	230,5	205,9	301,6
Fichte	198,5	210,6	256,8

Die Zu- und Abgänge gehen aus den beiden nachstehenden Tabellen hervor:

Lager- Zugänge	Filiale 1	Filiale 2	Filiale 3
Eiche	30	25	37
Esche	31	18	27
Pinie	26	30	29
Fichte	18	25	17

Lagerabgänge	Filiale 1	Filiale 2	Filiale 3
Eiche	40	22	41
Esche	37	24,8	31,8
Pinie	41,4	39,4	34,6
Fichte	25,7	40,9	36,8

Bestimmen Sie durch Matrizenaddition bzw. -subtraktion die ursprünglichen Lagerbestände in den einzelnen Filialen.

### 1. 3.

Eine Holzfabrik liefert an die Tischlereien Büller, Meyer und Schmitt jeweils verschiedene Mengen Eichen-, Fichten-, Kiefer- und Mahagoniholz zu folgenden Nettopreisen in €:

	Eiche	Fichte	Kiefer	Mahagoni
Büller	1500,00	1000,00	2000,00	3000,00
Meyer	1600,00	1200,00	1900,00	2600,00
Schmitt	2400,00	1000,00	1600,00	4000,00

Die Umsatzsteuer beträgt 16%. Berechnen Sie die jeweiligen Bruttoverkaufspreise.

### 1. 4.

Ein Lebensmittelhändler hat in drei Tagen folgende Absätze zu verzeichnen:

	Butter in kg	Milch in Liter	Weißbrot in Stück
1. Tag	30	40	20
2. Tag	35	45	25
3. Tag	25	50	22

Die Preise sind mit 4,00 € für 1 kg Butter, 1,00 € für 1 Liter Milch und 3,00 € für ein Weißbrot festgesetzt.

Berechnen Sie die Tagesumsätze für diese Waren durch Matrizenmultiplikation.

**1. 5.**

In den drei Geschäftsstellen (G1, G2, und G3) einer Versicherungsgesellschaft sind in einer Woche Verträge über folgende Summen (in €) abgeschlossen worden:

	Haftpflichtversicherung	Lebensversicherung	Bausparen
G1	400000	800000	400000
G2	300000	700000	500000
G3	400000	750000	800000

Von den Versicherungssummen erhalten der Vertreter und der Generalvertreter Provisionen in folgende Höhe:

	Vertreter	Generalvertreter
Haftpflichtversicherung	10.0%	5%
Lebensversicherung	1.0%	0,5%
Bausparen	0.3%	0,1%

Berechnen Sie durch Matrizenmultiplikation, welche Beträge an den Vertreter bzw. den Generalvertreter auszuzahlen sind.

**1. 6.**

Ein Fast-Food-Unternehmen möchte drei Imbissstuben mit Stühlen, Hockern und Bänken aus Kunststoff einrichten.

Benötigte Anzahl der Einrichtungsgegenstände:

	Imbissstube 1	Imbissstube 2	Imbissstube 3
Stühle	10	12	14
Hocker	4	5	4
Stehische	6	6	5
Bänke	4	3	4

Die Möbelfirmen Hamsen und Müller bieten die Einrichtungsgegenstände zu folgenden Preise (€) je Stück an:

	Stühle	Hocker	Stehisch	Bank
Hamsen	15	20	30	40
Müller	16	18	25	50

Berechnen Sie die Kosten der einzelnen Imbissstuben (in €) nach den Angeboten von Hamsen und Müller.

**1. 7.**

Ein Landwirtschaftsbetrieb baut 4 ha Kartoffeln, 3 ha Salat und 2 ha Mais an. Zur Bearbeitung der Felder werden drei Maschinen (M1, M2 und M3) eingesetzt, die für 1 ha Anbaufläche folgende Zeiten (Stunden) benötigen:

	M1	M2	M3
Kartoffeln	2	4	10
Salat	3	-	5
Mais	6	4	5

An Kosten entstehen dabei für eine Maschinenstunde 40,00 € für M1, 50,00 € für M2 und 60,00 € für M3.

Bestimmen Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung:

1. Wie lange jede Maschine für den Anbau des gesamten Gemüses eingesetzt wird.
2. Welche Kosten insgesamt für den Gemüseanbau entstehen.

**1. 8.**

Aus den drei Rohstoffen R1, R2 und R3 werden die beiden Zwischenprodukte Z1 und Z2 hergestellt, die wiederum zu den Endprodukten E1 und E2 weiterverarbeitet werden. Die zur Herstellung von einer Einheit eines Produktes benötigten Ausgangsmengen sind in den beiden Tabellen dargestellt:

Zwischenprodukte			Endprodukte		
	Z1	Z2		E1	E2
R1	2	3	Z1	4	5
R2	1	4	Z2	1	3
R3	5	3			

1. Bestimmen Sie durch Matrizenmultiplikation, welche Rohstoffmengen jeweils für die Herstellung einer Einheit von E1 und E2 benötigt werden?
2. Welche Rohstoffmengen werden zur Herstellung von 4 Einheiten von E1 und 5 Einheiten von E2 benötigt?
3. Welche Rohstoffkosten entstehen bei der Produktion von 4 Einheiten von E1 und 5 Einheiten von E2, wenn die Einkaufspreise für eine Einheit des Rohstoffes mit 3000,00 € für R1, 3200,00 € für R2 und 4000,00€ für R3 gegeben sind.

**1. 9.**

Die Großhandlung Elektro GmbH & Co KG beliefert die vier Einzelhändler Ahrens, Büller, Cremer und Deter mit Radios, Fernsehgeräten, Videorecordern und CD-Playern. Die Listeneinkaufspreise für die Einzelhändler betragen 120.00 € für ein Radio, 300.00 € für ein Fernsehgerät, 800.00 € für einen Videorecorder und 250.00 € für einen CD-Player. Ahrens erhält dabei 30%, Büller und Cremer 10% und Deter 20% Mengenrabatt. Die Lieferungen an Einzelhändler stellen sich wie folgt dar:

	Ahrens	Büller	Cremer	Deter
Radio	20	10	10	15
Fernsehgeräte	20	12	12	15
Videorecorder	10	5	6	10
CD-Player	15	5	5	10

Berechnen Sie die Zieleinkaufspreise, die jeder Einzelhändler insgesamt zu zahlen hat.

**1. 10.**

Ausgangsbasis einer Produktion seien vier Teile T1, T2, T3 und T4, die gemäß nachfolgender Tabelle zunächst zu drei Baugruppen B1, B2 und B3 verarbeitet werden:

<i>Teil</i>	<i>Anzahl der verarbeiteten Teile je Baugruppe</i>		
	B1	B2	B3
T1	0	3	1
T2	1	2	2
T3	3	1	1
T4	2	0	2

In einer weiteren Produktionsstufe werden die drei Baugruppen zu drei Endprodukten E1, E2 und E3 verarbeitet, wobei der Einsatzumfang wie folgt ausgewiesen ist:

<i>Baugruppe</i>	<i>Anzahl der Baugruppen je Produkteinheit</i>		
	E1	E2	E3
B1	1	2	1
B2	0	3	2
B3	4	1	2

1. Wie viel Ausgangsteile werden benötigt, wenn 50 Erzeugnisse E1, 100 Erzeugnisse E2 und 200 Erzeugnisse E3 hergestellt werden sollen?
2. Wie viel Ausgangsteile werden benötigt, wenn zusätzlich zu der unter 1. genannten Produktion die Bereitstellung von Baugruppen für Reparaturzwecke im Umfang von 10% der jeweils verarbeiteten Menge gefordert wird?

**1. 11.**

Eine Elektrofirma stellt die Produkte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  aus den Rohstoffen  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  her. Der Rohstoffverbrauch je Produkteinheit ist in der folgenden Tabelle angegeben:

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
$R_1$	2	1	2
$R_2$	4	5	3
$R_3$	8	7	1
$R_4$	3	1	8

Die Rohstoffpreise (in €) je Mengeneinheit liegen für die nächsten beiden Halbjahre fest und betragen:

	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$
1. Halbjahr	10	20	20	50
2. Halbjahr	15	30	20	60

Beantworten Sie folgende Fragen *mit Hilfe der Matrizenrechnung*:

1. Wie hoch sind die Rohstoffkosten für jedes Produkt in den nächsten beiden Halbjahren?
2. Wie hoch müssen die Verkaufspreise sein, wenn die Firma stets 20% Gewinn aufschlägt?
3. Wie hoch ist der Gewinn pro Halbjahr, wenn von den Produkten folgende Mengen verkauft werden?

	1. Halbjahr	2. Halbjahr
$P_1$	100	120
$P_2$	150	180
$P_3$	200	250

**1. 12.**

Ein Unternehmen stellt drei Haustypen  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  her. Dabei liegen für 2005, verteilt auf die beiden Halbjahre, die folgenden Auftragszahlen vor:

	1. Halbjahr	2. Halbjahr
$T_1$	5	6
$T_2$	7	7
$T_3$	12	10

Die folgende Tabelle gibt für die drei Typen an, wie viel Mengeneinheiten von fünf Inputfaktoren jeweils für ein Haus benötigt werden (Mengeneinheiten/Stück):

	Stahl	Holz	Glas	Farbe	Arbeit
$T_1$	5	20	16	7	17
$T_2$	7	18	12	9	21
$T_3$	6	25	8	5	13

Für die fünf Faktoren entstehen pro Mengeneinheit die folgenden Kosten (in €):

	Stahl	Holz	Glas	Farbe	Arbeit
Einkaufskosten	15	8	5	1	10
Transportkosten	5	2	3	1	0

Schließlich ist bekannt, dass für die Häuser folgende Preise (in 1000 €/Stück) verlangt werden:

$$T_1 : 500 \text{ €}, \quad T_2 : 700 \text{ €}, \quad T_3 : 800 \text{ €}.$$

Beantworten Sie folgende Fragen *mit Hilfe der Matrizenrechnung*:

1. Welche Mengen der fünf Faktoren werden jeweils in den beiden Halbjahren benötigt?
2. Welche Einkaufs- und Transportkosten entstehen, getrennt nach Halbjahren, insgesamt?
3. Welcher Gewinn entsteht in den beiden Halbjahren?

**1. 13.**

Ein Unternehmen produziert die Produkte  $P_1$ ,  $P_2$ , von denen im 1. Quartal des vergangenen Jahres folgende Mengen abgesetzt wurden:

	$P_1$	$P_2$
Januar	4	6
Februar	9	3
März	2	7

Die Absatzpreise sind für alle Monate gleich. Sie betragen für  $P_1$  40 € und für  $P_2$  100 €. Zur Produktion der Absatzmengen werden die Rohstoffe  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  benötigt. Die folgende Tabelle gibt den Rohstoffverbrauch je Mengeneinheit der Produkte  $P_1$ ,  $P_2$  an:

	$P_1$	$P_2$
$R_1$	1	0
$R_2$	2	3
$R_3$	4	6

Die Rohstoffkosten pro Mengeneinheit von  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  betragen:  $R_1$  : 4 €,  $R_2$  : 2 €,  $R_3$  : 7 €.

Die Verarbeitungskosten pro Mengeneinheit von  $P_1$ ,  $P_2$  betragen:  $P_1$  : 5 €,  $P_2$  : 7 €.

Bestimmen Sie durch *Anwendung der Matrizenrechnung* jeweils für die Monate Januar, Februar und März

1. den Umsatz des Unternehmens.
2. den Rohstoffverbrauch und die Rohstoffkosten,
3. die Verarbeitungskosten,
4. den Gewinn des Unternehmens, wenn neben den Rohstoff- und Verarbeitungskosten noch Fixkosten von 100 €/Monat anfallen.

**1. 14.**

Ein Betrieb plant in den vier Quartalen  $Q_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  folgende Mengen der beiden Produkte  $P_1$  und  $P_2$  herzustellen:

	$P_1$	$P_2$
$Q_1$	40	10
$Q_2$	30	30
$Q_3$	20	20
$Q_4$	10	30

Die beiden Produkte werden aus drei Einzelteilen  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  montiert, die auf zwei Maschinen  $M_1$  und  $M_2$  hergestellt werden. Die Fertigungszeiten (in Stunden) betragen:

	$E_1$	$E_2$	$E_3$
$M_1$	1	2	2
$M_2$	2	3	2

Der Bedarf an Einzelteilen bei der Montage der Endprodukte ergibt sich aus der folgenden Tabelle:

	$P_1$	$P_2$
$E_1$	1	2
$E_2$	0	3
$E_3$	2	1

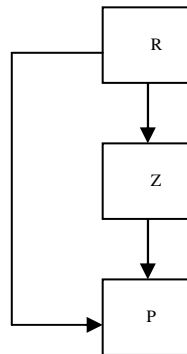
Beantworten Sie folgende Fragen *mithilfe der Matrizenrechnung*:

1. Wie viele Einzelteile werden je Quartal benötigt?
2. Wie viele Stunden werden die beiden Maschinen in jedem Quartal belegt sein?

**1. 15.**

Das nachfolgende Diagramm möge den Produktionsprozess eines Betriebes darstellen. Dabei seien:

- R: der Rohstoffblock,
- Z: der Zwischenproduktblock,
- P: der Endproduktblock.



Die Endprodukte werden teilweise *direkt* und teilweise *indirekt* über die Zwischenprodukte hergestellt.

Folgende Verflechtungen seien bekannt:

Direktverflechtung

	$P_1$	$P_2$
$R_1$	2	0
$R_2$	1	3

	$P_1$	$P_2$
$Z_1$	5	1
$Z_2$	0	3

Gesamtverflechtung

	$P_1$	$P_2$
$R_1$	12	11
$R_2$	21	13

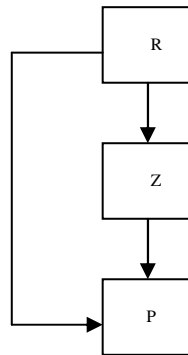


1. Schreibe Sie die obigen Tabellen als Matrizen.
2. Modellieren Sie den Produktionsprozess als eine Matrixgleichung.
3. Geben Sie die Verflechtung zwischen den Rohstoffen und den Zwischenprodukten an.

**1. 16.**

Das nachfolgende Diagramm möge den Produktionsprozess eines Betriebes darstellen. Dabei seien:

- R: der Rohstoffblock,
- Z: der Zwischenproduktblock,
- P: der Endproduktblock.



Die Endprodukte werden teilweise *direkt* und teilweise *indirekt* über die Zwischenprodukte hergestellt.

Folgende Verflechtungen seien bekannt:

Direktverflechtung		
	$P_1$	$P_2$
$R_1$	2	1
$R_2$	3	4

	$Z_1$	$Z_2$
$R_1$	3	0
$R_2$	2	1

Gesamtverflechtung		
	$P_1$	$P_2$
$R_1$	2	7
$R_2$	4	12

1. Schreibe Sie die obigen Tabellen als Matrizen.
2. Modellieren Sie den Produktionsprozess als eine Matrixgleichung.
3. Geben Sie die Verflechtung zwischen den Zwischenprodukten und Endprodukten an.