Kapitel III

Lineare Gleichungssysteme

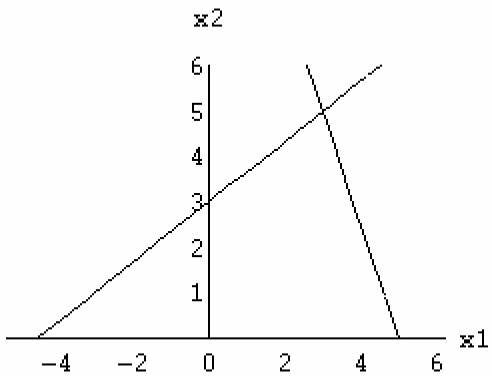
BS. 3. 1
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -9 \\ 5x_1 + 2x_2 = 25 \end{cases}$$

Lösung

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 5$$

$\therefore$ Das System hat eine *eindeutige* Lösung.

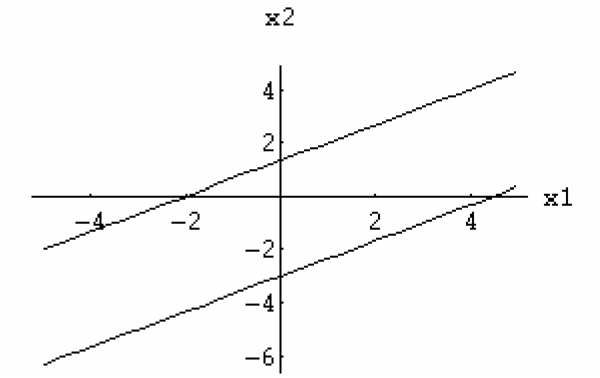


BS. 3. 2
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 6 \\ -4x_1 + 6x_2 = 8 \end{cases}$$

Lösung:

$\therefore$ Das System hat *keine* Lösung.

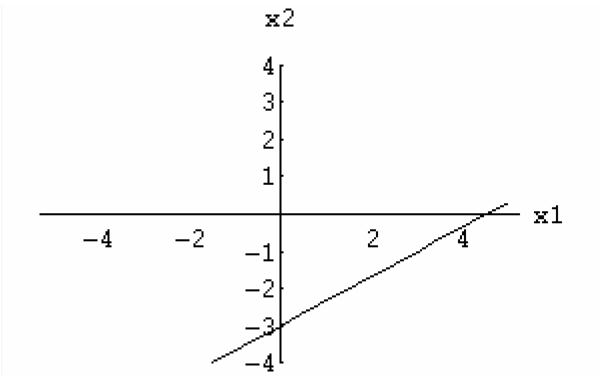


BS. 3. 3.
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 6 \\ -4x_1 + 6x_2 = -12 \end{cases}$$

Lösung:

$\therefore$ Das System hat unendlich viele Lösungen.



Die *allgemeine Lösung* des Gleichungssystems lautet:

$$x_1 = 3 + \frac{3}{2} x_2 \, .$$

Man nennt x_1 die *abhängige Variable* und x_2 die *unabhängige* Variable.

Folgende Lösungen heißen *spezielle* oder *partikuläre Lösungen*:

$$x_2 := 6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 12 \, ,$$

$$x_2 := -8 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -9$$

Setzt man die unabhängige Variable x_2 gleich null, so erhält man eine sog. *Basislösung*:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 0 .$$

x_1 heißt *Basisvariable* und x_2 heißt *Nichtbasisvariable*.

D. 3. 1. (*Lineare Gleichungssysteme*)
Ein *lineares Gleichungssystem* lässt sich folgendermaßen definieren:

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots \ + a_{1j}x_j + \ \dots \ + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots \ + a_{2j}x_j + \ \dots \ + a_{2n}x_n = b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \dots \ + a_{ij}x_j + \ \dots \ + a_{in}x_n = b_i \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{mi2}x_2 + \ \dots \ + a_{mj}x_j + \ \dots \ + a_{mn}x_n = b_m .
\end{array}$$

Sei

$$\begin{aligned}
&A := \left(a_{ij}\right), \quad i = 1,2,\dots,m; \;\; j = 1,2,\dots,n , \\
&x := \left(x_j\right), \quad j = 1,2,\dots,n , \\
&b := \left(b_i\right), \quad i = 1,2,\dots,m .
\end{aligned}$$

Das obige lineare Gleichungssystem lässt sich in der *Matrixform* folgender schreiben:

$$Ax = b$$

Ein lineares Gleichungssystem heißt *homogen*, wenn $b = 0$ gilt; andernfalls heißt es *inhomogen*.

B. 3. 1.
Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems kann genau einer der nachfolgenden Fälle eintreten:

1. Das Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung.
2. Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.
3. Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

BS. 3. 4.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenden Sie das Gauß-Jordan-Verfahren zur

1. Bestimmung der Matrix A^{-1}, falls sie existiert,
2. Berechnung der Determinante von A.
3. Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$.

Lösung:

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
$\leftarrow x_4$	**-1**	6	2	1	0	0	4
x_5	2	-2	-1	0	1	0	2
x_6	3	-4	-2	0	0	1	1
$\rightarrow x_1$	1	-6	-2	-1	0	0	-4
$\leftarrow x_5$	0	**10**	3	2	1	0	10
x_6	0	14	4	3	0	1	13
x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	2
$\rightarrow x_2$	0	1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	1
$\leftarrow x_6$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	1	-1
x_1	1	0	0	0	2	-1	3
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\rightarrow x_3$	0	0	1	-1	7	-5	5

1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\det A = -1 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = 2 .$$

3.

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -\tfrac{1}{2} & 5 \end{pmatrix}^T .$$

<u>BS. 3. 5.</u>
Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8 \end{cases}$$

Lösung:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
1	-2	3	-1	2	2
3	-1	5	-3	-1	6
2	1	2	-2	-3	8
1	-2	3	-1	2	2
0	**5**	-4	0	-7	0
0	5	-4	0	-7	4
1	0	$\frac{7}{5}$	-1	$-\frac{4}{5}$	2
0	1	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{7}{5}$	0
0	0	0	0	0	4

Die letzte Zeile des letzten Tableaus enthält den Widerspruch: 0 = 4. Damit ist das Gleichungssystem inconsistent und hat *keine* Lösung.

<u>BS. 3. 6</u>
Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 16 \end{cases} .$$

Lösung:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
1	1	1	-1	4
1	-1	1	1	8
3	1	3	-1	16
1	1	1	-1	4
0	**-2**	0	2	4
0	-2	0	2	4
1	1	1	-1	4
0	**-2**	0	2	4
1	0	1	0	6
0	1	0	-1	-2

Wir schreiben das Endtableau als Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 \qquad = \;\; 6 \\ \quad x_2 \qquad - x_4 = -2 \end{cases}.$$

Das Gleichungssystem hat die *allgemeine Lösung*:

$$\begin{aligned} x_1 &= \;\; 6 - x_3 \\ x_2 &= -2 + x_4\,. \end{aligned}$$

Setzt man z.B. $x_3 := 5, \quad x_4 := 6$, so erhält man die *spezielle* (bzw. *partikuläre*) *Lösung* $x = (1 \quad 4 \quad 5 \quad 6)^T$. Es gibt eine unendliche Anzahl von solchen Lösungen.
Für $x_3 = x_4 := 0$ erhalten wir die *Basislösung* $x = (6 \quad -2 \quad 0 \quad 0)^T$. $x_1,\ x_2$ heißen *Basisvariable,* $x_3,\ x_4$ *Nichtbasisvariable.*

(Letzte Aktualisierung: 27.11.08)