Kapitel III

Lineare Gleichungssysteme

(Lösungen)

3. 1.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

a^1	a^2	a^3	a^4	$a5$
2	-1	3	-2	4
4	-2	5	1	7
2	-1	1	8	2
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	2
0	0	-1	5	-1
0	0	-2	10	-2
1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	-5	1
0	0	0	0	0
1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0	1	-5	1

$r(A) = 2$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

b^1	b^2	b^3
2	6	-2
3	1	4
5	-2	6
1	3	-1
0	-8	7
0	-17	11
1	0	$\frac{13}{8}$
0	1	$-\frac{7}{8}$
0	0	$-\frac{31}{8}$
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$r(B) = 3$

3. 2.

$$a^1 = \begin{pmatrix}2 & 1 & 5\end{pmatrix}^T, \quad a^2 = \begin{pmatrix}4 & 3 & 2\end{pmatrix}^T, \quad a^3 = \begin{pmatrix}6 & -4 & 3\lambda\end{pmatrix}^T$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

a^1	a^2	a^3
2	4	6
1	3	-4
5	2	3λ
1	2	3
0	1	-7
0	-8	$-15+3\lambda$
1	0	17
0	1	-7
0	0	$-71+3\lambda$

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad \lambda = \dfrac{71}{3} \\ 3 & \text{für} \quad \lambda \neq \dfrac{71}{3} \end{cases}$$

3. 3.

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

a^1	a^2	a^3	a^4
1	3	-2	4
5	16	-8	23
2	7	-2	λ
1	3	-2	4
0	1	2	3
0	1	2	-8+ λ
1	0	-8	-5
0	1	2	3
0	0	0	-11+ λ

Für $\lambda = 11$ hat die Matrix den minimalen Rang 2.

3. 4.

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	2	-1	1	0	0
5	3	-2	0	1	0
3	2	-1	0	0	1
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	1	0
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	-1	0
0	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	2	0
0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1
1	0	0	1	0	-1
0	1	0	-1	-1	3
0	0	1	1	-2	2

d.h.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	1	-1	1	0	0
-2	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1
1	1	-1	1	0	0
0	3	-1	2	1	0
0	0	2	-1	0	1
1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
0	0	2	-1	0	1
1	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

d.h.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. 5.

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
1	1	-1	0
-1	2	1	6
2	-1	1	3
2	2	1	a
1	1	-1	0
0	3	0	6
0	-3	3	3
0	0	3	a
1	0	-1	-2
0	1	0	2
0	0	3	9
0	0	3	a
1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	3
0	0	0	$-9+a$

Für $a=9$ lautet die eindeutige Lösung des Gleichungssystems:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3$$

3. 6.

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
1	2	-1	0
2	-3	0	-3
1	3	a	a
1	2	-1	0
0	-7	2	-3
0	1	$1+a$	a
1	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{6}{7}$
0	1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$
0	0	$\frac{9}{7}+a$	$-\frac{3}{7}+a$

1. Für $a = -\frac{9}{7} \wedge a = \frac{3}{7}$, d.h. für kein a.
2. Für $a \neq -\frac{9}{7}$

3. 7.

a)

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
2	2	4	1	0	0
1	1	3	0	1	0
3	1	5	0	0	1
1	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0
0	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	0	1
1	-3	0	$-\frac{5}{2}$	0	2
0	-2	0	-2	1	1
0	2	1	$\frac{3}{2}$	0	-1
1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	3	0	1	0	0
1	-2	0	0	1	0
3	2	1	0	0	1
1	3	0	1	0	0
0	-5	0	-1	1	0
0	-7	1	-3	0	1
1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	0
0	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
0	0	1	$-\frac{8}{5}$	$-\frac{7}{5}$	1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{8}{5} & -\frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	0	1	1	0	0
3	1	-3	0	1	0
1	2	-2	0	0	1
1	0	-1	1	0	0
0	1	0	-3	1	0
0	2	-1	-1	0	1
1	0	-1	-1	0	0
0	1	0	-3	1	0
0	0	-1	5	-2	1
1	0	0	-4	2	-1
0	1	0	-3	1	0
0	0	1	-5	2	-1

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 8.

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
2	1	1	0
$-2p$	p	9	6
2	2	p	1
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	$2p$	$9+p$	6
0	1	$p-1$	1

Für $p \neq 0$ hat man:

1	0	$\frac{p-9}{4p}$	$-\frac{3}{2p}$
0	1	$\frac{9+p}{2p}$	$\frac{3}{p}$
0	0	$\frac{2p^2-3p-9}{2p}$	$-\frac{3}{p}+1$

Für $p = 0$ erhält man:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 9x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 1, \end{aligned}$$

also die *eindeutige Lösung* $x_1 = -\frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$.

Es gilt nun $\frac{2p^2-3p-9}{2p} = 0 \iff 2p^2 - 3p - 9 = 0 \iff p = -\frac{3}{2} \lor p = 3$.

Für $p \neq -\frac{3}{2},\ 0,\ 3$ hat man wegen

1	0	0	$\frac{p-9}{2(p+1.5)}-\frac{3}{2p}$
0	1	0	$\frac{3}{p}-\frac{9+p}{p(p+1.5)}$
0	0	1	$\frac{2(p-3)}{2p^2-3p-9}$

die *eindeutige Lösung*

$$x_1 = \frac{p-9}{2(p+1.5)}-\frac{3}{2p}; \qquad x_2 = \frac{3}{p}-\frac{9+p}{p(p+1.5)}; \qquad x_3 = \frac{2(p-3)}{2p^2-3p-9}$$

Für $p = -\frac{3}{2}$ hat das Gleichungssystem *keine* Lösung.
Für $p = 3$ hat das Gleichungssystem *unendlich viele Lösungen.* Die *allgemeine Lösung* des Gleichungssystems lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2p} \\ \frac{3}{p} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{p-9}{4p} \\ \frac{9+p}{2p} \end{pmatrix} \cdot x_3$$

3. 9.

Tableaufolge der Gauß-Jordan-Methode:

x_1	x_2	x_3	x_0
1	-2	3	-4
2	1	1	2
1	a	2	$-b$
1	-2	3	-4
0	5	-5	10
0	$2+a$	-1	$4-b$
1	0	1	0
0	1	-1	2
0	0	$a+1$	$-2a-b$

Das Gleichungssystem hat *keine Lösung* für $a=-1 \wedge -2a-b \neq 0$, also für

$$a=-1 \quad \wedge \quad b \neq 2$$

Für $a=-1 \;\wedge\; b=2$ hat das Gleichungssystem *unendlich viele Lösungen.* Die entsprechende *allgemeine Lösung* lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x_3$$

Sei $a \neq -1$. Dann hat man:

1	0	0	$\frac{2a+b}{a+1}$
0	1	0	$\frac{2-b}{a+1}$
0	0	1	$-\frac{2a+b}{a+1}$

Das Gleichungssystem hat also die *eindeutige Lösung*:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2a+b}{a+1} \\ \dfrac{2-b}{a+1} \\ -\dfrac{2a+b}{a+1} \end{pmatrix}$$

(Letzte Aktualisierung: 29.07.06)