Kapitel III

Lineare Gleichungssysteme

(Aufgaben)

2. 3.

1.

$$w_1 a^1 + w_2 a^2 = a^4$$

$$w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 = 4 \\ 3w_1 - w_2 = 5 \\ 2w_1 + 4w_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow\ w_1 = 2,\quad w_2 = 1$$

$\therefore\quad a^4 = 2a^1 + a^2$.

2.

$$w_1 a^1 + w_2 a^2 + w_3 a^3 = a^5$$

$$w_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 + 5w_3 = 0 \\ 3w_1 - w_2 + 2w_3 = 6 \\ 2w_1 + 4w_2 - 3w_3 = 13 \end{cases} \Rightarrow\ w_1 = 3,\quad w_2 = 1,\quad w_3 = -1$$

$\therefore\quad a^5 = 3a^1 + a^2 - a^5.$

3.

$$w_1 a^1 + w_2 a^2 + w_4 a^4 = a^5$$

$$w_1\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+w_2\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}+w_4\begin{pmatrix}4\\5\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\6\\13\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} w_1+2w_2+4w_4=0\\ 3w_1-w_2+5w_4=6\\ 2w_1+4w_2+8w_4=13\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-7w_2-7w_4=6\\ 14w_2+14w_4=27\end{cases} \Rightarrow \text{ Widerspruch!}$$

$\therefore$ a^5 lässt sich nicht als Linearkombination von a^1, a^2, a^4 darstellen., Nein, denn es handelt sich um unterschiedliche Variablen.

2. 6.

$$\det\begin{pmatrix}a^1 & a^2 & a^3\end{pmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \det\begin{pmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}=0$$

$$(b-a)^2\left(a+2b\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=b\wedge a=-2b.$$

2. 8.

$$\begin{array}{lll}
2 & 4 & 6\\
1 & 3 & -4\\
-\ 5 & 2 & -3\lambda\ +\\
-\ 2 & 4 & 6\ +\\
-\ 1 & 3 & -4\ +
\end{array}$$

$$\det A=\det\left(a^1,a^2,a^3\right)^T=\det\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 1 & 3 & -4\\ 5 & 2 & 3\lambda\end{pmatrix}=\left(18\lambda+12-80\right)-\left(90-16+12\lambda\right)=6\lambda-142$$

$$6\lambda-142\neq 0.$$

Damit ist für $\lambda\neq\frac{142}{6}=\frac{71}{3}$ der Rang des Vektorsystems $r(S)=3$.

(Letzte Aktualisierung: 05.10.09)