Kapitel I

Matrizen

<u>D. 1. 1.</u> (*Matrix*)
Ein rechteckiges Schema

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j}. & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von m Zeilen und n Spalten aus den *Elementen* a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots n$, heiß eine *Matrix* oder genauer eine $(m \cdot n) - $*Matrix*.
Das geordnete Paar (m, n) gibt die *Dimension* der Matrix an.
Sei $M^{(m,n)}$ die *Menge aller Matrizen mit* m Zeilen und n Spalten.

<u>B. 1. 1.</u>
Gelegentlich wird eine Matrix $A \in M^{(m,n)}$ kurz durch ihr *allgemeines Element* a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, dargestellt:

$$A := (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m; \ \ j = 1, 2, \dots, n .$$

<u>BS. 1. 1.</u>
Die nachfolgende Tabelle gibt die Entfernung zwischen zwei Versandsorten V_1, V_2 und drei Bestimmungsorten B_1, B_2 und B_3 in km an:

	B_1	B_2	B_3
V_1	40	50	34
V_2	70	23	80

Dies kann als eine “Entfernungsmatrix” dargestellt werden:

$$A := \begin{pmatrix} 40 & 50 & 34 \\ 70 & 23 & 80 \end{pmatrix} \in M^{(2,3)}.$$

D. 1. 2.
Die Matrix $A:(a_{ij}) \in M^{(m,n)}$ heißt

1. eine *Nullmatrix*, wenn

$$a_{ij} = 0,\ i = 1,2,...,m;\ j = 1,2,...,n.$$

Sie wird mit 0 bezeichnet.

2. eine *quadratische* Matrix, wenn

$$m = n$$

gilt.

(Man spricht dann von einer Matrix der *Ordnung* m bzw. n).

eine *Diagonalmatrix*, wenn gilt

$$m = n \quad \text{und} \quad a_{ij} = 0,\ i \neq j.$$

Die Elemente a_{ii}, $i = 1,2,...,n,$ bilden die *Hauptdiagonale* der Matrix A und heißen *Hauptdiagonalelemente*.

2. 1. 1. eine *Skalarmatrix*, wenn gilt $m = n$ und

$$a_{ij} := \begin{cases} a = const & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}.$$

2. 1. 2. eine *Einheitsmatrix*, wenn gilt $m = n$ und

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}.$$

(Eine Einheitsmatrix der Ordnung n wird im Weiteren mit $E \in M^{(n,n)}$ bezeichnet.

2. 2. eine *untere Dreiecksmatrix*, wenn gilt $m = n$ und

$$a_{ij} = 0, \quad i < j$$

und eine *obere Dreiecksmatrix*, wenn gilt $m = n$ und

$$a_{ij} = 0, \quad i > j\,.$$

2. 3. *symmetrisch,* wenn gilt $m = n$ und

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, ..., n$$

und *schiefsymmetrisch*, wenn gilt $m = n$ und

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, ..., n .$$

3. ein *Zeilenvektor*, wenn $m = 1$

$$a = (a_1, ..., a_j, ..., a_n)$$

und ein *Spaltenvektor*, wenn $n = 1$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ . \\ . \\ . \\ a_i \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{pmatrix}$$

ist.

<u>D. 1. 3.</u> (*Teilmatrix*)
Ein rechteckiges Schema, das aus einer Matrix $A \in M^{(m,n)}$ herausgegriffen wird, heißt eine *Teilmatrix* von A .

<u>BS. 1. 2.</u>
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Eine Teilmatrix von A ist z.B. die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>D. 1. 4.</u> (*Ordnungsrelation*)
Sei $A, B \in M^{(m,n)}$.

1. A heißt genau dann *gleich* B , wenn $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, ...m;\ j = 1, 2, ..., n$. Symbolisch: $A = B$.

2. A heißt genau dann *kleiner* als B, wenn $a_{ij} < b_{ij}$, $i = 1,2,...m$; $j = 1,2,...,n$.
   Symbolisch: $A < B$.
3. A heißt genau dann *kleiner oder gleich* B, wenn $a_{ij} < b_{ij}$, $i = 1,2,...m$; $j = 1,2,...,n$.
   Symbolisch $A \le B$.

D. 1. 5. (*Transponierte Matrix*)
$A := (a_{ij}) \in M^{(m,n)}$. Dann heißt $A^T := (a_{ji}) \in M^{(n,m)}$ die *transponierte Matrix zu* A.

BS. 1. 3
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix zu A lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

D. 1. 6 (*Summe*)
Seien $A, B \in M^{(m,n)}$. Unter der *Summe* der Matrizen A und B versteht man:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij}) =: (c_{ij}) = C.$$

D. 1. 7. (*Produkt einer Matrix mit einem Skalar*)
Sei $A \in M^{(m,n)}$ und $\alpha \in R^1$. Unter dem *Produkt der Matrix A mit dem Skalar* α versteht man:

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot (a_{ij}) := (\alpha \cdot a_{ij}).$$

BS. 1. 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \alpha = -2.$$

Es gilt:

$$\alpha \cdot A = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

D. 1. 8. (*Verkettete Matrizen*)
Die Matrizen $A \in M^{(m,n)}$ und $B \in M^{(p,q)}$ heißen (in dieser Reihenfolge) *verkettet*, wenn

$$n = p$$

gilt.

D. 1. 9. (***Produkt zweier Matrizen***)

Gegeben seien die Matrizen $A \in M^{(m,n)}$ und $B \in M^{(p,q)}$. Es gelte $n = p$. Unter dem *Produkt* AB dieser Matrizen versteht man:

$$A \cdot B =: C := (c_{ik}), \quad i = 1, 2, ..., m; \; k = 1, 2, ..., p$$

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

BS. 1. 2.

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

B. 1. 2.

Bei der Matrizenmultiplikation gilt das Kommutativgesetz nicht:

$$A \cdot B \neq B \cdot A,$$

selbst, wenn A und B quadratische Matrizen gleicher Ordnung sind.

BS. 1. 5.

Betrachtet sei ein Betrieb, der aus Einzelteilen E_1, E_2, E_3 und E_4 die Baugruppen B_1, B_2 und B_3 montiert und aus diesen Baugruppen Endprodukte P_1 und P_2 fertigt. Folgender Tabelle ist zu entnehmen, wie viel Einzelteile jeweils in eine Baugruppe eingehen:

Einzelteile	Erforderliche Anzahl von Einzelteilen je Baugruppe		
	B_1	B_2	B_3
E_1	3	2	0
E_2	1	5	2
E_3	0	4	1
E_4	3	2	4

Folgende Tabelle zeigt, wie viel Baugruppen jeweils in ein Endprodukt eingehen:

Baugruppe	Erforderliche Anzahl von Erzeugnissen je Endprodukteinheit	
	P_1	P_2
B_1	4	5
B_2	3	1
B_3	0	2

1. Berechnen Sie die erforderliche Anzahl von Einzelteilen je Einheit der Endprodukte.
2. Wie viele Einzelteile werden benötigt, wenn 100 Einheiten P_1 und 80 Einheiten P_2 hergestellt werden?
3. Die Einzelteilpreise pro Mengeneinheit betragen 2, 4, 3 bzw. 7 €. Wie viel muss für die Einzelteile ausgegeben werden, wenn das unter 2. genannte Produktionsprogramm realisiert werden soll.

Lösung:
1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C := A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 19 & 14 \\ 12 & 6 \\ 18 & 25 \end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix} 18 & 17 \\ 19 & 14 \\ 12 & 6 \\ 18 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3160 & 3020 & 1680 & 3800 \end{pmatrix}^T.$$

3.

$$\begin{pmatrix} 3160 & 3020 & 1680 & 3800 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 50040 \text{ €}.$$

D. 1. 9. (*Determinante*)
Die Determinante $\det A$ bzw. $|A|$ ist eine Zahl, die der quadratischen Matrix $A \in M^{(n,n)}$ durch folgende Vorschrift zugeordnet wird:

$$\det A := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \quad i = 1,2,...,n \qquad \text{(Entwicklung nach der Zeile } i\text{)}$$

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}, \quad j = 1,2,...,n \qquad \text{(Entwicklung nach der Spalte } j\text{)}$$

Dabei ist A_{ij} eine Teilmatrix der Matrix A. Sie entsteht dadurch, dass in der Matrix A die Zeile i und die Spalte j gestrichen werden.
Sei für $n = 1$:

$$\det A := a_{11};$$

für $n = 2$:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

BS. 1. 6.
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 8 \\ 5 & 17 & -11 \end{pmatrix}$$

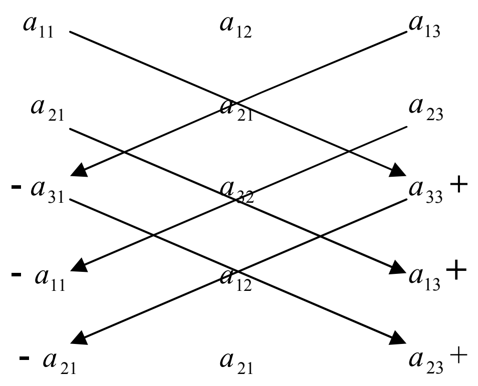
Lösung:
Wir entwickeln die Determinante der Matrix nach der zweiten Zeile:

$$\det A = (-1)^{2+1} \cdot (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 17 & -11 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -11 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 8 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot (-11) - (-3) \cdot 17) + (1 \cdot (-11) - (-3) \cdot 5) - 8 \cdot (1 \cdot 17 - 2 \cdot 5)$$

$$= -2$$

B. 1. 3. (*Sarruss-ches Schema*)
Es handelt sich um ein einfaches Schema zur Berechnung der Determinante einer Matrix der Ordnung 3:



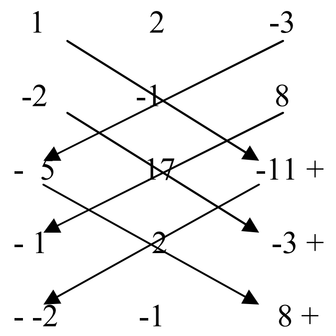
$$\det A = +(a_{11}\cdot a_{21}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{33}\cdot a_{13} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23}) - \left(a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{31} + a_{23}\cdot a_{33}\cdot a_{11} + a_{33}\cdot a_{12}\cdot a_{21}\right)$$

<u>BS. 1. 7.</u>
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 8 \\ 5 & 17 & -11 \end{pmatrix}$$

nach Sarrus:

Lösung:



$$\det(A) = (11 + 102 + 80) - (15 + 136 + 44) = -2$$

<u>D. 1. 10</u> (*Singuläre und reguläre Matrizen*)
Die Matrix $A := (a_{ij}),\, i,\, j = 1, 2, \ldots, n$ heißt *singulär*, wenn $\det A = 0$ ist; andernfalls heißt sie *regulär*.

BS. 1. 8.
Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ist singulär (Übung!)

D. 1. 11. **(*Rang einer Matrix*)**
Unter dem *Rang* der Matrix $A \in M^{(m,n)}$, bezeichnet mit $r(A)$ versteht man die Ordnung der größten regulären Teilmatrix der Matrix *A*.

B. 1. 4.
Es gilt für die Matrix $A \in M^{(m,n)}$:

$$0 \le r(A) \le \min(m;n)$$

D. 1. 12. **(*Inverse Matrix, Umkehrmatrix*)**
Gibt es zu einer (quadratischen) Matrix *A* eine Matrix *B* mit

$$A \cdot B = B \cdot A = E,$$

so nennt man B die *inverse Matrix zu* A (*bzw*. die *Umkehrmatrix* zu A) und bezeichnet sie mit A^{-1}.

S. 1. 1.
Es gibt zu einer Matrix höchstens eine Inverse.

Beweis:
Sei

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

und

$$A \cdot B^* = B^* \cdot A = E .$$

Dann gilt:

$$A \cdot B = A \cdot B^*$$

$$B \cdot (A \cdot B) = B \cdot (A \cdot B^*)$$

$$(B \cdot A) \cdot B = (B \cdot A) \cdot B^*$$

$$E \cdot B = E \cdot B^*$$

$$B = B^* .$$

q.e.d.

S. 1. 2.
Seien A und B invertierbare Matrizen. Dann gilt:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(A \cdot B\right)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

(Dabei wird die Verkettung der entsprechenden Matrizen vorausgesetzt.)

S. 1. 3.
Sei $A := (a_{ij}) \in M^{(n,n)}$ regulär. Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{adj}^T$$

mit

$$A_{adj} := ((-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})): \qquad \textit{adjungierte Matrix,}$$

wobei A_{ij} die gleiche Bedeutung haben wie in D. 1. 9.

BS. 1. 9.
Folgende Matrix ist zu invertieren:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung.

$$\det A = -28,$$

$$A_{11} = -7, \qquad A_{12} = -7, \qquad A_{13} = 14,$$

$$A_{21} = -7, \qquad A_{22} = 5, \qquad A_{23} = -6,$$

$$A_{31} = 7, \qquad A_{32} = -1, \qquad A_{33} = -10$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & -7 & 7 \\ -7 & 5 & -1 \\ 14 & -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

BS. 1. 10
Aus der Matrizengleichung

$$2X - (A+B)^2 X = C - C^T X$$

ist die Matrix X zu berechnen. Dabei ist:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$2X - (A+B)^2 X + C^T X = C$$

$$\left(2E - (A+B)^2 + C^T\right) X = C$$

$$X = D^{-1} C \qquad\qquad \text{mit } \; D := 2E - (A+B)^2 + C^T$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 25 & 14 \\ 38 & 21 \end{pmatrix}.$$

(Letzte Aktualisierung: 12.11.08)