Kapitel I

Matrizenrechnung

(Lösungen)

1. 1.

1.

1) nicht sinnvoll
2) nicht sinnvoll
3) sinnvoll
4) nicht sinnvoll
5) nicht sinnvoll
6) sinnvoll

2.

3) $$Ayx^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6)

$$xy^T A^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

1. 2.

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 39$$

$24 + 20 + 2a = 39$, $\qquad a = -\frac{5}{2}$;

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1.5 \\ 3 \\ b \end{pmatrix} = 54$$

$9 + 21 + 8b = 54$, $\qquad b = 3$

1. 3.
Sei

$$A.B =: X := (x_{st}), \qquad .BA =: Y := (y_{st}), \qquad X - Y := C := (c_{st}).$$

Dann gilt

$$x_{kk} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{jk}\ , \qquad y_{kk} = \sum_{j=1}^{n} b_{kj} a_{jk}\ , \qquad \sum_{k=1}^{n} c_{kk} = \sum_{k=1}^{n} (x_{kk} - y_{kk}) = 0.$$

1. 4

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \\ B_5 & B_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 + A_3B_6 \\ A_4B_1 + A_5B_3 + A_6B_5 & A_4B_2 + A_5B_4 + A_6B_6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ -5 & -20 & 17 \\ 14 & 11 & -1 \\ -6 & -5 & 21 \end{pmatrix}$$

1. 5.

$$\det A = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = -6$$

$$\det B = 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -146$$

1. 6.

$$\det A = 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & a \end{pmatrix} - 2 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{pmatrix} + 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = -15 \neq 0$$

Die Matrix A ist also regulär für alle a.

1. 7.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \det\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & \lambda \end{pmatrix} = -17\lambda + 119$$

$r(A) = 2$ für $\lambda = 7$; sonst $r(A) = 3$

1. 8.

a) existiert nicht, da die Matrix nicht quadratisch ist;

b) existiert nicht; da die Matrix singulär ist.

c) $A^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -18 & 11 & 5 \\ 2 & -4 & 5 \\ 13 & -1 & -5 \end{pmatrix}$;

d) existiert nicht, da die Matrix singulär ist;

e) E

1. 9.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 10.

$AX + B = 2 \cdot (X - C)$, $\qquad AX - 2X = -B - 2C$, $\qquad (2E - A)X = B + 2C$

$X = D^{-1}(B + 2C)$ $\qquad$ mit $\qquad D := 2E - A$, falls D^{-1} existiert.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B + 2C = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 15 \\ -1 & 1 & -5 \\ 10 & 11 & 22 \end{pmatrix}$$

(Letzte Aktualisierung: 27.07.06)