Kapitel I

Matrizenrechnung

(Aufgaben)

1. 1.
Gegeben seien die Vektoren

$$x^T = (1,\ -2), \qquad y^T = (1,\ 0,\ -1)$$

sowie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Welche der folgenden Ausdrücke sind dann sinnvoll?

   1) $y^T xA$, 2) $y^T Ax$, 3) Ayx^T, 4) Axy, 5) $\left(A^T y\right)^T x$
   6) $xy^T A^T$.

2. Berechnen Sie die sinnvollen Ausdrücke.

1. 2.
Bestimmen Sie a und b so, dass gilt: $C = A^{\cdot} B$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & a \\ 6 & 7 & 8 \\ b & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.5 & 6 & b \\ 3 & 4 & 6 \\ b & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 13.5 & 39 & 34.5 \\ 54 & 80 & 84 \\ 22.5 & 38 & 39 \end{pmatrix}.$$

1. 3.
Es seien A und B Matrizen der Ordnung n, und es sei $AB - BA = C = (c_{kj})$. Zeigen Sie, daß stets $\sum_{k=1}^{n} c_{kk} = 0$ gilt.

1. 4.
Ermitteln Sie das Produkt der Matrizen A und B, indem Sie diese Matrizen als *Blockmatrizen* auffassen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 5 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. 5.
Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. 6.
Bestimmen Sie a so, dass die Matrix A regulär ist:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & a \end{pmatrix}.$$

1. 7.
Bestimmen Sie den Rang der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & \lambda \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von λ.

1. 8.
Bestimmen Sie die inverse Matrix von A, falls sie existiert:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. 9
Bestimmen Sie die (2 x 2)-Matrix A, für die gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. 10.
Berechnen Sie die Matrix X aus der Matrizengleichung

$$AX + B = 2(X - C)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ -4 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

(Letzte Aktualisierung: 27.07.06)