Dr. Sc. J. Siassi
HTW Berlin
Januar 2024

Quantitative Methoden der Logistik

A. Pflichtaufgaben

Problem 1	**14 Punkte**

1.
Sei

x_1 : Anzahl der Tische

x_2 : Anzahl der Stühle

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 80x_1 + 15x_2 &\rightarrow Max! \\
x_1 \qquad\qquad &\le 20 \\
6x_1 + 1.5x_2 &\le 240 \\
180x_1 + 30x_2 &\le 5400 \\
x_1, x_2 &\ge 0 \quad \text{: ganz}
\end{aligned}
$$

2.
Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 80x_1 + 15x_2 &\rightarrow Max! \\
x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 20 \\
6x_1 + 1.5x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 240 \\
180x_1 + 30x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 400 \\
x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5,\ x_1, x_2 &: \text{ ganz}
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	0	1	0	0	20
x_4	6	1.5	0	1	0	240
x_5	180	30	0	0	1	400
z	-80	-15	0	0	0	0
x_1	1	0	1	0	0	20
x_4	0	$\frac{3}{2}$	-6	1	0	120
x_5	0	30	-180	0	1	1800
z	0	-15	80	0	0	1600
x_1	1	0	1	0	0	20
x_4	0	0	3	1	$-\frac{1}{20}$	30
x_2	0	1	-6	0	$\frac{1}{30}$	60
z	0	0	-10	0	$\frac{1}{2}$	2500
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{60}$	10
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{60}$	10
x_2	0	1	0	2	$-\frac{1}{15}$	120
	0	0	0	$\frac{10}{3}$	$\frac{1}{3}$	2600

$$x^* = \begin{pmatrix}10 & 120 & 10 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \quad z^* = 2600$$

3.
Wegen $x_4 = 0$ wird die Arbeitszeit 100% erschöpft.

Problem 2	**13 Punkte**

$$\mu_1 = 3 \cdot 0.10 + 6 \cdot 0.30 + 8 \cdot 0.35 + 4 \cdot 0.25 = 6.34 = 5.9$$

$$\mu_2 = 5 \cdot 0.10 + 4 \cdot 0.30 + 7 \cdot 0.35 + 5 \cdot 0.25 = 6.34 = 5.4$$

$$\mu_3 = 6 \cdot 0.10 + 3 \cdot 0.30 + 8 \cdot 0.35 + 6 \cdot 0.25 = 6.34 = 5.8$$

$$\sigma_1 = \sqrt{3^2 \cdot 0.10 + 6^2 \cdot 0.30 + 8^2 \cdot 0.35 + 4^2 \cdot 0.25 - 5.9^2} = 1.81$$

$$\sigma_2 = \sqrt{5^2 \cdot 0.10 + 4^2 \cdot 0.30 + 7^2 \cdot 0.35 + 5^2 \cdot 0.25 - 5.4^2} = 1.24$$

$$\sigma_3 = \sqrt{6^2 \cdot 0.10 + 3^2 \cdot 0.30 + 8^2 \cdot 0.35 + 6^2 \cdot 0.25 - 5.8^2} = 2.01$$

$$\Phi(\mu = 5.9, \sigma = 1.81) = 16.795$$

$$\Phi(\mu = 5.4, \sigma = 1.24) = 5.580$$

$$\Phi(\mu = 5.8, \sigma = 2.01) = 16.395$$

	$b_1(0.10)$	$b_2(0.30)$	$b_3(0.35)$	$b_4(025)$	μ_i	σ_i	$\Phi(\mu_i, \sigma_i)$
a_1	3	6	8	4	**5.9**	1.81	**16.795**
a_2	5	4	7	5	5.4	1.24	15.580
a_3	6	3	8	6	5.8	2.01	16.395

1. $a^* = a_1$
2. $a^* = a_1$

Problem 3	**13 Punkte**

1.

T^f	Ereignis	1	2	3	4	5	6	7	8
$\underline{0}$	1		2	4					
$\underline{2}$	2				2	3	4		
4	3						3		
$\underline{4}$	4							5	
5	5							2	
7	6								5
$\underline{9}$	7								6
$\underline{15}$	8								
	T^s	$\underline{0}$	$\underline{2}$	7	$\underline{4}$	7	10	$\underline{9}$	$\underline{15}$

Kritischer Weg:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 8\,.$$

2.
Dauer: 15 Zeiteinheiten.

3.

$i = 4, \quad j = 7$

$$\Delta^G t_{47} = T_7^s - T_4^f - t_{47} = 9 - 4 - 5 = 0$$

$$\Delta^F t_{47} = T_7^f - T_4^f - t_{47} = 9 - 4 - 5 = 0$$

$i = 5, \quad j = 7$

$$\Delta^G t_{57} = T_7^s - T_5^f - t_{57} = 9 - 5 - 2 = 2$$

$$\Delta^F t_{57} = T_7^f - T_5^f - t_{57} = 9 - 5 - 2 = 2$$

Die gesamte Schlupfzeit ist die Zeitspanne zwischen frühestmöglichem und spätestzulässigem Eintreten eines Ereignisses.

Die freie Schlupfzeit gibt den Anteil an der gesamten Schlupfzeit, wenn alle “Nachfolger” zu ihren frühestmöglichen Terminen beginnen.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Problem 4	**10 Punkte**

1.

i	j	a_{ij}	m_{ij}	b_{ij}	$\bar{t}_{ij}$	$\sigma^2_{t_{ij}}$
1	2	4	7	12	7.33	1.78
1	3	8	10	13	10.17	0.69
2	3	6	5	8	5.67	0.11
2	4	1	3	4	2.83	0.25
3	4	2	5	6	4.67	0.44
3	5	4	5	6	5.00	0.11
4	5	2	4	7	4.17	0.69

σ^2_{TF}	$\bar{T}^f$		1	2	3	4	5
0	0.00	1		7.33 1.77	10.17 0.69		
1.77	7.33	2			5.66 0.11	2.83 0.25	
1.88	12.99	3				4.66 0.44	5.00 0.11
2.32	16.67	4					4.17 0.69
3.01	21.82	5					
		$\bar{T}^s$	0.00	7.33	12.99	16.67	21.82
		σ^2_{TS}	3.01	1.24	1.13	0.69	0

Kritischer Weg: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$.

Projektdauer: 21.82 Zeiteinheiten.

2.

$$P(X \le 23.82) = F(23.82) = \Phi\left(\frac{23.82 - 21.82}{\sqrt{3.01}}\right) \approx \Phi(1.15) = 0.874939 \approx 0.87$$

Problem 5	**10 Punkte**

Es wird eine zulässige Basis Lösung nach der Methode VAM aufgestellt

	E_1	E_2	E_3	E_4	a_i	d_i	u_i
B_1	12	10	8 **3**	11	3	2,3	-3
B_2	12	10 **8**	14	14 **10**	18	2,4,0	0
B_3	8 **6**	8	11 **2**	13 **1**	9	0,3,2	-1
b_j	6	8	5	11			
d_j	4	2	3	2,1			
v_j	9	10	14	14			

$z_0 = 327$

Überprüfung auf Optimalität:

	E_1	E_2	E_3	E_4	a_i	u_i
B_1	12 5	10	8 **3**	11 10	3	-3
B_2	12 9	10 **8 -**	14 12	14 **10 +**	18	1
B_3	8 **6**	8 + 9	11 **2**	13 **1 -**	9	0
b_j	6	8	5	11		
v_j	8	9	11	13		

Die Lösung ist noch nicht optimal. Wir rechnen weiter

	E_1	E_2	E_3	E_4	a_i	u_i
B_1	12 6	10 7	8 **3** 	11 8	3	-3
B_2	12 9	10 **7** 6	14 12	14 **11** 	18	0
B_3	8 **6** 	8 **1** 	11 **2** 	13 	9	-1
b_j	6	8	5	11		
v_j	9	10	14	14		

	E_1	E_2	E_3	E_4	a_i	u_i
B_1	12 5	10 5	8 **3** 	11 9	3	-3
B_2	12 10	10 **7** 	14 13	14 **11** 	18	2
B_3	8 **6** 	8 **1** 	11 **2** 	13 12	9	0
b_j	6	8	5	11		
v_j	8	8	11	12		

$z_1 = z^* = 326$

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 11 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$