Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
September 2024

Klausur

Wirtschaftsmathematik

Aufgabe 1 **35 Punkte**

1.

$$U(x) = 42x - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

$$G(x) = U(x) - K(x) = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 36x - 25$$

$$G'(x) = -x^2 - 5x + 36$$

$$\left\langle -x^2 - 5x + 36 = 0 \ \wedge \ x \geq 0 \right\rangle \ \Rightarrow \ x = 4$$

$$G''(x) = -2x - 5, \quad G''(4) = -8 - 5 = -13 < 0$$

Daher erzielt der Monopolist für eine Produktion von 4 Mengeneinheiten den maximalen Gewinn von

$$G(4) = \frac{173}{3} \approx 57.67 \text{ GE}$$

Dazu muss er einen Preis von

$$p(4) = \frac{80}{3} \approx 26.67 \text{ GE/ME}$$

verlangen.

2.

$$\varepsilon_{G,x}(x) = \frac{x}{G(x)} \cdot G'(x) = \frac{x \cdot \left(-x^2 - 5x + 36\right)}{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 36x - 25}$$

$$\varepsilon_{G,x}(6) = \frac{6 \cdot \left(-x^2 - 5x + 36\right)}{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 36x - 25} = \frac{6 \cdot (-30)}{29} = -\frac{180}{29} = -6.207\%$$

Wird die Produktionsmenge ausgehend von 6 Mengeneinheiten um 1% erhöht, so geht der Gewinn um etwa 6.207% zurück.

Aufgabe 2	**35 Punkte**

1

$$G(x_1,x_2) = (55 - x_1 - x_2)x_1 + (70 - x_1 - 2x_2)x_2 - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \to Max!$$

$$G(x_1,x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 55x_1 + 70x_2 \to Max!$$

$$G_{x_1}(x_1,x_2) = -4x_1 - 3x_2 + 55$$

$$G_{x_2}(x_1,x_2) = -3x_1 - 6x_2 + 70$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + 55 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 + 70 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 8.00, \quad x_2 = \frac{23}{3} \approx 7.67$$

$$\det H = \det\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = 15 > 0, \quad G_{x_1x_1} = -4$$

Daher ist der Gewinn des Betriebs maximal, wenn 8.00 ME von P_1 und 7.67 ME von P_2 produziert werden.

2.

$$G(x_1 = 8.00, x_2 = 7.67) = 488.33\,\text{GE}.$$

3.

$$p_1 = 39.33 \text{ GE}, \quad p_2 = 46.67 \text{ GE}$$

Es ist genau eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 3	**30 Punkte**

1.
Sei

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_{RZ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 11 & 25 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.

$$M - M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

$$M - M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

$$M_{ZP} = M_{RZ}^{-1}\left(M - M_{RP}\right),$$

$$M_{RZ}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{ZP} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

	P_1	P_2
Z_1	0	1
Z_2	2	4

4.

$$\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 264 \\ 390 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4	**30 Punkte**

Sei

$x_i,\ i=1,2,3:$ die Produktionsmenge P_i

Das Modell:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

1.

x_1	x_2	x_3	x_0
3	2	1	17
1	1	1	10
2	1	0	7
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$
0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{13}{3}$
1	0	-1	-3
0	1	2	13
0	0	0	0

$$x_1 - x_3 = -3$$
$$x_2 + 2x_3 = 13,$$

d.h.

$$x_1 = -3 + x_3 \ge 0$$
$$x_2 = 13 - 2x_3 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \le x_3 \le \frac{13}{2}$$
$$x_3 \ge 0$$

2.

$$x_3 := 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$x_3 := 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1$$