Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Juli 2024

Klausur

Wirtschaftsmathematik

Aufgabe 1	**35 Punkte**

1.

$$K'(x) = 0.03x^2 - 0.02x + 5$$

$$K'(1000) = 29985.$$

Erhöht man die Produktion von 1000 Einheiten um eine Einheit, so erhöhen sich die Kosten um etwa 29986 Geldeinheiten.

2.
Die Gleichung $0.03x^2 - 0.02x + 5 = 0$ hat wegen $b^2 - 4ac = (-0.02)^2 - 4 \cdot 0.03 \cdot 5 < 0$ keine reellen Lösungen. Daher muss die Kostenfunktion monoton sein.

Ferner ist wegen

$$\left(x_1 = 0 < 1 = x_2\right) \quad \Rightarrow \quad \left(F(x_1) = 200 < 205 = F(x_2)\right)$$

die Kostenfunktion streng monoton wachsend.

Wegen

$$K''(x) = 0.06x - 0.02 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$$

ist die Kostenfunktion für $x > \frac{1}{3}$ konvex.

<u>Zusammenfassend</u>: Die Kosten wachsen für $0 < x < \frac{1}{3}$ degressiv und für $x > \frac{1}{3}$ progressiv.

3.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 50x - 0.01x^2$$

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$G(x) = 50x - 0.01x^2 - (0.01x^3 - 0.01x^2 + 5x + 200)$$

$$= -0.01x^3 + 45x - 200$$

$$G'(x) = -0.03x^2 + 45$$

$$\left(-0.03x^2+45=0 \ \wedge \ x\geq 0\right) \ \Rightarrow \ x\approx 38.73$$

$$G''(x)=-0.06x<0 \text{ für } \forall x>0.$$

Daher nimmt die Gewinnfunktion an der Stelle $x\approx 38.73$ ein relatives (und wegen der Eindeutigkeit das absolute) Maximum. Es gilt ferner:

$$G(38.73)\approx 961.90 \text{ GE}$$
$$p(38.73)\approx 49.61 \text{ GE/ME}.$$

4.

$$\varepsilon_{K,x}(x)=\frac{x}{K(x)}\cdot K'(x)$$

$$\varepsilon_{K,x}(x)=\frac{x}{0.01x^3-0.01x^2+5x+200}\cdot(0.03x^2-0.02x+5)$$

$$\varepsilon_{K,x}(10)=\frac{10}{259}\cdot 7.8\approx 0.30 \ .$$

Erhöht man die Produktion von 10 Einheiten um 1%, so erhöhen sich die Kosten um etwa 0.30%. Die Kostenfunktion ist an der Stelle $x=10$ unelastisch.

Aufgabe 2	**35 Punkte**

1 – 3

$$U_1(p_1,p_2)=\left(10-p_1+2p_2\right)p_1, \qquad U_2(p_1,p_2)=\left(8+2p_1-6p_2\right)p_2$$

$$U(p_1,p_2)=U_1(p_1,p_2)+U_2(p_1,p_2)$$

$$=\left(10-p_1+2p_2\right)p_1+\left(8+2p_1-6p_2\right)p_2$$

$$=-p_1^2-6p_2^2+4p_1p_2+10p_1+8p_2$$

$$K(p_1,p_2)=4\left(10-p_1+2p_2\right)+2\left(8+2p_1-6p_2\right)$$

$$K(p_1,p_2)=-4p_2+56$$

$$G(p_1,p_2)=U(p_1,p_2)-K(p_1,p_2)$$

$$G(p_1,p_2)=-p_1^2-6p_2^2+4p_1p_2+10p_1+8p_2+4p_2-56$$

$$G(p_1,p_2)=-p_1^2-6p_2^2+4p_1p_2+10p_1+12p_2-56$$

$$G_{p_1}(p_1, p_2) = -2p_1 + 4p_2 + 10$$

$$G_{p_2}(p_1, p_2) = 4p_1 - 12p_2 + 12$$

$$\begin{cases} -2p_1 + 4p_2 + 10 = 0 \\ 4p_1 - 12p_2 + 12 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_1 = 21, \quad p_2 = 8$$

$$H(p_1, p_2)\begin{pmatrix} G_{p_1p_1}(p_1, p_2) & G_{p_1p_2}(p_1, p_2) \\ G_{p_2p_1}(p_1, p_2) & G_{p_2p_2}(p_1, p_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\left(\det H(p_1, p_2) = 24 > 0\right) \ \wedge \ G_{p_1p_1}(p_1, p_2) < 0$$

wird für $p_1 = 21$ GE/ME, $p_2 = 8$ GE/ME der maximale Gewinn erzielt. Die entsprechenden Produktionsmengen lauten:

$$x_1 = 5 \text{ ME}, \qquad x_2 = 2 \text{ ME}$$

Der maximale Gewinn beträgt: $G(21,\ 8) = 97$ GE

Es ist genau eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 3	**30 Punkte**

1.
Sei

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_{ZP} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.

$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} = M - M_{RP},$$

$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} \cdot M_{ZP}^{-1} = \left(M - M_{RP}\right) \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{RZ} = \left(M - M_{RP}\right) \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{ZP}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{RZ} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

	Z_1	Z_2
R_1	0	2
R_2	1	5

4.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 685 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4	**30 Punkte**

x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
1	2	1	2	40
1	4	5	6	100
2	5	6	8	130
1	2	1	2	40
0	2	4	4	60
0	1	4	4	50
1	0	-3	-2	-20
0	1	2	2	30
0	0	2	2	20
1	0	0	1	10
0	1	0	0	10
0	0	1	1	10

Aus

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad x_4 &= 10 \\ x_2 \qquad\quad &= 10, \quad x_i \geq 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

folgt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} & x_1 = 10 - x_4 \geq 0 \\ & x_2 = 10 \\ & x_3 = 10 - x_4 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \end{aligned}$$

und hieraus

$$0 \leq x_4 \leq 10.$$