Dr. sc. Siassi
HTW Berlin

Februar 2020

Klausur

Mathematik
Fernstudium Bachelor

Es sind <u>genau drei</u> der nachfolgenden vier Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1	**33 Punkte**

1.
Sei

$$R_{RZ} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_{ZP} := \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 47 & 20 \\ 62 & 32 \end{pmatrix}$$

2.

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 8 \\ 47 & 20 \\ 62 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3700 \\ 8700 \\ 12600 \end{pmatrix}$$

3.

$$K_R = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3700 \\ 8700 \\ 12600 \end{pmatrix} = 131100 \text{ €}$$

Aufgabe 2	**33 Punkte**

I
Sei

x_1 : Anzahl der Hosen ,

x_2 : Anzahl der Kleider

Das Model :

$$
\begin{aligned}
z &= 30x_1 + 20x_2 \rightarrow Max! \\
x_1 + x_2 &\le 10 \\
2x_1 + x_2 &\le 12 \\
x_1 \quad\;\; &\le 6 \\
x_2 &\le 8 \\
x_1, x_2 &\ge 0: \text{ ganz}
\end{aligned}
$$

2.
Normalform:

$$
\begin{aligned}
z &= 30x_1 + 20x_2 \rightarrow Max! \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 10 \\
2x_1 + x_2 \quad + x_4 \qquad &= 12 \\
x_1 \qquad\quad + x_5 \quad &= 6 \\
x_2 \qquad\qquad + x_6 &= 8 \\
x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 6&: \text{ ganz}
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_3	1	1	3	0	0	0	10
x_4	2	1	0	1	0	0	12
x_5	1	0	0	0	1	0	6
x_6	0	1	0	0	0	1	8
z	**-30**	-20	0	0	0	0	0
x_3	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	6
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0
x_6	0	1	0	0	0	1	8
z	0	**-5**	0	15	0	0	180
x_2	0	1	2	-1	0	0	8
x_1	1	0	-1	1	0	0	2
x_5	0	0	1	-1	1	0	4
x_6	0	0	-1	1	0	1	0
z	0	0	10	10	0	0	220

$x^* = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$, $\quad z^* = 220$ €

Aufgabe 3	**33 Punkte**

1.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 222x - 6x^2$$
$$G(x) = U(x) - K(x) = 222x - 6x^2 - (293 + 159x - 12x^2 + x^3)$$
$$G(x) = -x^3 + 6x^2 + 63x - 293$$
$$G'(x) = -3x^2 + 12x + 63$$
$$\left(G'(x) = 0 \ \wedge \ x \geq 0\right) \ \Rightarrow \ x = 7$$
$$G''(x) = -6x + 12, \qquad G''(7) = -30 < 0.$$

Damit der Gewinn maximal, wenn 7 Mengeneinheiten produziert werden.
De maximale Gewinn beträgt:

$$G(7) = 99 \,\text{GE}.$$

Dafür muss der Preis $p(7) = 180\,\text{GE}$ betragen.

2.

$$K(x) = 293 + 159x - 12x^2 + x^3, \ x > 0$$

$$K'(x) = 159 - 24x + 3x^2, \ x > 0\,.$$

Wegen

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 159}}{6} = \frac{24 \pm \sqrt{-1332}}{6}$$

hat die Kostenfunktion keine Extrema.
Andererseits gilt

$$\left\langle x_1 = 1 < 2 = x_2 \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle K(x_1) = 441 < 571 = K(x_2) \right\rangle.$$

Daher ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend.

$$K''(x) = -24 + 6x, \ x > 0$$

$$K''(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ 6x > 24 \ \Leftrightarrow \ x > 4.$$

Damit wachsen die Kosten degressiv für $0 < x < 4$; sie wachsen progressiv für $x > 4$.

3.

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{K(x)} \cdot K'(x)$$
$$= \frac{x \cdot (159 - 24x + 3x^2)}{293 + 159x - 12x^2 + x^3}$$

$$\varepsilon_{K,x}(8) = \frac{8 \cdot 159}{1309} = 0.9717\%$$

Erhöht sich die Produktion von 8 ME um 1%, so erhöhen sich die Kosten um etwa 0.9717%. Die Kostenfunktion ist für einen Output von 8 ME unelastisch.

Aufgabe 4	**33 Punkte**

1.

$$U(p_1, p_2) = (50 - p_1 - 0.5p_2)p_1 + (60 - 0.1p_1 - 1.5p_2)p_2$$

$$K(p_1, p_2) = 60 + 0.5(50 - p_1 - 0.5p_2) + 60 + 0.5(60 - 0.1p_1 - 1.5p_2)$$

$$\begin{aligned} G(p_1, p_2 &= U(p_1, p_2) - K(p_1, p_2)\,, \\ &= -p_1^2 - 1.5p_2^2 - 0.6p_1p_2 + 50.55p_1 + 61p_2 - 175 \end{aligned}$$

2. – 3.

$$G_{p_1}(p_1, p_2) = -2p_1 - 0.6p_2 + 50.55$$
$$G_{p_2}(p_1, p_2) = -0.6p_1 - 3p_2 + 61$$

$$\begin{cases} 2p_1 + 0.6p_2 = 50.55 \\ 0.6p_1 \quad + 3p_2 = 61 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad p_1 \approx 20.40, \quad p_2 = 16.25$$

$$\left\langle \det H = \det\begin{pmatrix} -2 & -0.6 \\ -0.6 & -3 \end{pmatrix} = 5.64 > 0 \;\wedge\; G_{p_1p_1} = -2 < 0 \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

D.h. für $p_1 = 20.40$ und $p_2 = 16.25$ wird ein maximaler Gewinn von 811.93 GE erzielt

4.

$$x_1(p_1 = 20.40, p_2 = 16.25) \approx 21.47$$

$$x_2(p_1 = 20.40, p_2 = 16.25) \approx 33.57$$