Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
7. Dezember 2019

Klausur

Mathematik
Fernstudium Bachelor

Es sind <u>genau drei</u> der nachfolgenden vier Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1	**33 Punkte**

Sei

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad M_{ZP} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.

$$M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 12 & 15 \\ 30 & 30 \end{pmatrix}.$$

2.

$$r = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 12 & 15 \\ 30 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 306 \\ 234 \\ 510 \end{pmatrix}.$$

3.

$$r = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 12 & 15 \\ 30 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 162 \\ 123 \\ 270 \end{pmatrix}$$

$$K_R = \begin{pmatrix} 4000 & 3500 & 6000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 162 \\ 123 \\ 270 \end{pmatrix} = 2698500\,€$$

Aufgabe 2	**33 Punkte**

1.
Sei

x_1 : Anzahl der Kühlschränke

x_2 : Anzahl den Gefrierschrank

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 100x_1 + 150x_2 &\to Max! \\
x_1 + x_2 &\le 200 \\
150x_1 + 300x_2 &\le 45000 \\
x_1 &\le 150 \\
x_1, x_2 &\ge 0 : \text{ganz}
\end{aligned}
$$

2.
Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 100x_1 + 150x_2 &\to Max! \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 200 \\
150x_1 + 300x_2 + x_4 &= 45000 \\
x_1 + x_5 &= 150 \\
x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5 .
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	1	1	0	0	200
x_4	150	300	0	1	0	45000
x_5	1	0	0	0	1	150
z	-100	-150	0	0	0	0
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{300}$	0	50
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{300}$	0	150
x_5	1	0	0	0	1	150
z	-25	0	0	0	0	22500
x_2	1	0	2	$-\frac{1}{150}$	0	100
x_1	0	1	-1	$\frac{1}{150}$	0	100
x_5	0	0	-2	$\frac{1}{150}$	1	50
z	0	0	50	$\frac{1}{3}$	0	25000

$$x^* = \begin{pmatrix}100 & 100 & 0 & 0 & 50\end{pmatrix}^T, \quad z^* = 25000.$$

Aufgabe 3	**33 Punkte**

1.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 222x - 6x^2$$

$$G(x) = U(x) - K(x) = 222x - 6x^2 - (293 + 159x - 12x^2 + x^3)$$

$$G(x) = -x^3 + 6x^2 + 63x - 293$$

$$G'(x) = -3x^2 + 12x + 63$$

$$\left(G'(x) = 0 \ \wedge \ x \geq 0\right) \ \Rightarrow \ x = 7$$

$$G''(x) = -6x + 12, \qquad G''(7) = -30 < 0.$$

Damit der Gewinn maximal, wenn 7 Mengeneinheiten produziert werden.
De maximale Gewinn beträgt:

$$G(7) = 99 \,\text{GE}.$$

Dafür muss der Preis $p(7) = 180\,\text{GE}$ betragen.

2.

$$K(x) = 293 + 159x - 12x^2 + x^3, \ x > 0$$

$$K'(x) = 159 - 24x + 3x^2, \ x > 0 \,.$$

Wegen

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 159}}{6} = \frac{24 \pm \sqrt{-1332}}{6}$$

hat die Kostenfunktion keine Extrema.
Andererseits gilt

$$\langle x_1 = 1 < 2 = x_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle K(x_1) = 441 < 571 = K(x_2) \rangle .$$

Daher ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend.

$$K''(x) = -24 + 6x,\ x > 0$$

$$K''(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ 6x > 24 \ \Leftrightarrow \ x > 4.$$

Damit wachsen die Kosten degressiv für $0 < x < 4$; sie wachsen progressiv für $x > 4$.

3.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{K,x}(x) &= \frac{x}{K(x)} \cdot K'(x)\\ &= \frac{x \cdot (159 - 24x + 3x^2)}{293 + 159x - 12x^2 + x^3}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_{K,x}(8) = \frac{8 \cdot 159}{1309} = 0.9717\%$$

Erhöht sich die Produktion von 8 ME um 1%, so erhöhen sich die Kosten um etwa 0.9717%.
Die Kostenfunktion ist für einen Output von 8 ME unelastisch.

Aufgabe 4	**33 Punkte**

1. - 3.

$$G(p_1, p_2) = 850p_1 - 36p_1^2 + 15p_1p_2 + 1075p_2 + 20p_1p_2 - 25p_2^2 - 30p_1 - 40p_2$$

$$= -36p_1^2 - 25p_2^2 + 35p_1p_2 + 820p_1 + 1035p_2 .$$

$$G_{p_1}(p_1, p_2) = -72p_1 + 35p_2 + 820 := 0$$

$$G_{p_2}(p_1, p_2) = 35p_1 - 50p_2 + 1035 := 0$$

$$\begin{cases} -72p_1 + 35p_2 + 820 := 0 \\ 35p_1 - 50p_2 + 1035 := 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_1 = 32.51579, \quad p_2 = 43.461052$$

$$\det H = \begin{pmatrix} -72 & 35 \\ 35 & -50 \end{pmatrix} > 0 \quad \wedge \quad G_{p_1p_1}(p_1, p_2) < 0.$$

Damit wäre der maximale Gewinn für $p_1 = 32.51579,\ p_2 = 43.461052$ erzielt.

$$x_1 = 331.34734 \ , \qquad\qquad x_2 = 638.7895$$

Ein Betrieb verkauft zwei Produkte P_1 und P_2. Die Verkaufspreise der beiden Produkte betragen 30 € bzw. 45 €.
Die Nachfragefunktionen der Produkte lauten:

$$x_1 = 850 - 36p_1 + 15p_2 , \qquad x_2 = 1075 + 20p_1 - 25p_2.$$

1. Für welche Produktionsmengen wird ein maximaler Gewinn erzielt?
2. Wie hoch ist der maximale Gewinn?
3. Wie lauten die entsprechenden Preise?