Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
7. Dezember 2019

Klausur

Mathematik
Fernstudium Bachelor

Es sind <u>genau drei</u> der nachfolgenden vier Aufgaben zu lösen.

Aufgabe 1	**33 Punkte**

Sei

$$M_{RZ} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad M_{ZE} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.

$$M_{RE} = M_{RZ} \cdot M_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 10 & 7 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

2.

$$r = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 10 & 7 \\ 16 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 240 \\ 520 \end{pmatrix}.$$

3.

$$K_R = \begin{pmatrix} 1000 & 3000 & 5000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 440 \\ 240 \\ 520 \end{pmatrix} = 3760000 \text{ €}$$

Aufgabe 2	**33 Punkte**

1.
Sei

$x_i,\ i=1,2:$ Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
& z = 10x_1 + \frac{25}{2}x_2 \rightarrow \max! \\
& 5x_1 + 12.5x_2 \le 100 \\
& 9x_1 + 7.5x_2 \le 90 \\
& x_1 \le 7 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

2.
Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
& z = 10x_1 + \frac{25}{2}x_2 \rightarrow \max! \\
& 5x_1 + 12.5x_2 + x_3 = 100 \\
& 9x_1 + 7.5x_2 + x_4 = 90 \\
& x_1 + x_5 = 7 \\
& x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	5	$\frac{25}{2}$	1	0	0	100
x_4	9	$\frac{15}{2}$	0	1	0	90
x_5	1	0	0	0	1	7
z	-10	$-\frac{25}{2}$	0	0	0	0
x_2	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{2}{25}$	0	0	8
x_4	6	0	$-\frac{3}{5}$	1	0	30
x_5	1	0	0	0	1	7
z	-5	0	1	0	0	100
x_2	0	1	$\frac{3}{25}$	$-\frac{1}{15}$	0	6
x_1	1	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	0	5
x_5	0	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{6}$	1	2
z	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	0	125

$$x^* = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^T, \quad z^* = 125.$$

Aufgabe 3 — 33 Punkte

1.

$$K'(x) = 0.03x^2 - 0.02x + 5$$

$$K'(1000) = 29985.$$

Erhöht man die Produktion von 1000 Einheiten um eine Einheit, so erhöhen sich die Kosten um etwa 29986 Geldeinheiten.

2.

Die Gleichung $0.03x^2 - 0.02x + 5 = 0$ hat wegen $b^2 - 4ac = (-0.02)^2 - 4 \cdot 0.03 \cdot 5 < 0$ keine reellen Lösungen. Daher muss die Kostenfunktion monoton sein.
Ferner ist wegen

$$\left(x_1 = 0 < 1 = x_2\right) \quad \Rightarrow \quad \left(F(x_1) = 200 < 205 = F(x_2)\right)$$

die Kostenfunktion streng monoton wachsend.
Wegen

$$K''(x) = 0.06x - 0.02 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{3}$$

ist die Kostenfunktion für $x > \frac{1}{3}$ konvex.

<u>Zusammenfassend</u>: Die Kosten wachsen für $0 < x < \frac{1}{3}$ degressiv und für $x > \frac{1}{3}$ progressiv.

3.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 50x - 0.01x^2$$

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$G(x) = 50x - 0.01x^2 - (0.01x^3 - 0.01x^2 + 5x + 200)$$

$$G(x) = -0.01x^3 + 45x - 200$$

$$G'(x) = -0.03x^2 + 45$$

$$\left(-0.03x^2 + 45 = 0 \;\wedge\; x \geq 0\right) \;\Rightarrow\; x \approx 38.73$$
$$G''(x) = -0.06x < 0 \text{ für } \forall x > 0.$$

Daher nimmt die Gewinnfunktion an der Stelle $x \approx 38.73$ ein relatives (und wegen der Eindeutigkeit das absolute) Maximum. Es gilt ferner:

$$G(38.73) \approx 961.90 \text{ GE}$$
$$p(38.73) \approx 49.61 \text{ GE/ME}.$$

4.

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{K(x)} \cdot K'(x)$$

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{0.01x^3 - 0.01x^2 + 5x + 200} \cdot (0.03x^2 - 0.02x + 5)$$

$$\varepsilon_{K,x}(10) = \frac{10}{259} \cdot 7.8 \approx 0.30\,.$$

Erhöht man die Produktion von 10 Einheiten um 1%, so erhöhen sich die Kosten um etwa 0.30%. Die Kostenfunktion ist an der Stelle $x = 10$ unelastisch.

Aufgabe 4	33 Punkte

1.

$$x_1 = 14 - 0.25p_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 56 - 4x_1$$
$$x_2 = 24 - 0.5p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 48 - 2x_2$$

$$E(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \; R(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$$

$$= (56 - 4x_1)x_1 + (48 - 2x_2)x_2$$

$$G(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) - K(x_1, x_2)$$

$$G(x_1, x_2) = -5x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_1 \cdot x_2 + 56x_1 + 48x_2$$

$$G_{x_1}\left(x_1, x_2\right) = -10x_1 - 5x_2 + 56$$

$$G_{x_2}\left(x_1, x_2\right) = -5x_1 - 6x_2 + 48$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 56 \\ 5x_1 + 6x_2 = 44 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2.75, \quad x_2 = 5.7$$

$$G_{x_1x_1} = -10, \quad G_{x_1x_2} = G_{x_2x_1} = -5, \quad G_{x_2x_2} = -6$$

$$\det H = \det\begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = 35 > 0, \qquad P_{x_1x_1} < 0\,.$$

Damit ist der Gewinn maximal für $x_1 \approx 2.74, \; x_2 \approx 5.71$.

2.

$$G\left(2.75, 5.70\right) \approx 213.94\,.$$

3.

$$p_1 = 45, \qquad p_2 \approx 36.6.,$$