Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
März 2019

Klausur

Wirtschaftsmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**25 Punkte**

1.
Sei

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_{ZP} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}.$$

2.
$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.
$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} = M - M_{RP},$$

$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} \cdot M_{ZP}^{-1} = \left(M - M_{RP}\right) \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{RZ} = \left(M - M_{RP}\right) \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{ZP}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{RZ} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

	Z_1	Z_2
R_1	0	2
R_2	1	5

4.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 255 \\ 685 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2	**25 Punkte**

1.
Sei

$x_i,\ i=1,2:$ Produktionsmenge P_i

<u>Das Modell</u>:

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 10x_2 &\to Max!\\
30x_1 + 10x_2 &\le 3000\\
40x_1 + 30x_2 &\le 6000\\
10x_1 + 20x_2 &\le 2000\\
x_1, x_2 &\ge 0\,.
\end{aligned}
$$

2.
<u>Die Normalform</u>:

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 10x_2 &\to Max!\\
30x_1 + 10x_2 + x_3 &= 3000\\
40x_1 + 30x_2 \quad + x_4 &= 6000\\
10x_1 + 20x_2 \quad\quad + x_5 &= 2000\\
x_i \ge 0,\ i &= 1,2,\dots,5.\,.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	30	10	1	0	0	3000
x_4	40	30	0	1	0	6000
x_5	10	20	0	0	1	2000
z	-20	-10	0	0	0	0
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{30}$	0	0	100
x_1	0	$\frac{50}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	2000
x_5	0	$\frac{50}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	1000
z	0	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	2000
x_1	1	0	$\frac{1}{25}$	0	$-\frac{1}{50}$	80
x_4	0	0	-1	1	-1	1000
x_2	0	1	$-\frac{1}{50}$	0	$\frac{3}{50}$	60
z	0	0	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	2200

$$x^* = \begin{pmatrix}80 & 60 & 0 & 1000 & 0\end{pmatrix}^T, \qquad z^* = 2200 \text{ GE}$$

3.
Auf der Maschine M_2 bleiben 1000 Zeiteinheiten übrig, da $x_4 = 1000$ ist.

Aufgabe 3	**25 Punkte**

1.

$$G(x_1,x_2) = U(x_1,x_2) - K(x_1,x_2)$$

$$= -2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 + 200x_1 + 160x_2 - (2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1x_2 + 100)$$

$$G(x_1,x_2) = -4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_1x_2 + 200x_1 + 160x_2 - 100 \rightarrow \max$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 30, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

2.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_1 x_2 + 200x_1 + 160x_2 - 100 - \lambda(x_1 + x_2 - 30) \to \max$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = -8x_1 - 4x_2 + 200 - \lambda$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = -4x_1 - 8x_2 + 160 - \lambda$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 30$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 + 200 - \lambda = 0 \\ -4x_1 - 8x_2 + 160 - \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 + 200 - \lambda = 0 \\ -4x_1 - 8x_2 + 160 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow -8x_1 - 4x_2 + 200 = -4x_1 - 8x_2 + 160 \Rightarrow -4x_1 + 4x_2 = -40$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = -40 \\ x_1 + x_2 = -30 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 20, \quad x_2 = 10$$

$$\lambda = -8x_1 - 4x_2 + 200 \Rightarrow \lambda = 0$$

$$\det H = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & -4 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix} = 8 > 0$$

Damit ist der Gewinn maximal für:

$$x_1^* = 20, \quad x_2^* = 10, \quad \lambda^* = 0.$$

(Bemerkung: Die Tatsache, dass $\lambda^* = 0$ bedeutet, dass die Optimallösung gültig wäre auch ohne die geforderte Nebenbedingung.)

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 4	**25 Punkte**

1.

$$K'(x) = 0.03x^2 - 0.02x + 5$$

$$K'(1000) = 29985..$$

Erhöht man die Produktion von 1000 Einheiten um eine Einheit, so erhöhen sich die Kosten um etwa 29986 Geldeinheiten.

2.

Die Gleichung $0.03x^2 - 0.02x + 5 = 0$ hat wegen $b^2 - 4ac = (-0.02)^2 - 4 \cdot 0.03 \cdot 5 < 0$ keine reellen Lösungen. Daher muss die Kostenfunktion monoton sein.
Ferner ist wegen

$$\left(x_1 = 0 < 1 = x_2\right) \quad \Rightarrow \quad \left(F(x_1) = 200 < 205 = F(x_2)\right)$$

die Kostenfunktion streng monoton wachsend.
Wegen

$$K''(x) = 0.06x - 0.02 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{3}$$

ist die Kostenfunktion für $x > \frac{1}{3}$ konvex.

<u>Zusammenfassend</u>: Die Kosten wachsen für $0 < x < \frac{1}{3}$ degressiv und für $x > \frac{1}{3}$ progressiv.

3.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 50x - 0.01x^2$$

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$G(x) = 50x - 0.01x^2 - (0.01x^3 - 0.01x^2 + 5x + 200)$$

$$G(x) = -0.01x^3 + 45x - 200$$

$$G'(x) = -0.03x^2 + 45$$

$$\left(-0.03x^2 + 45 = 0 \;\wedge\; x \geq 0\right) \;\Rightarrow\; x \approx 38.73$$

$$G''(x) = -0.06x < 0 \text{ für } \forall x > 0.$$

Daher nimmt die Gewinnfunktion an der Stelle $x \approx 38.73$ ein relatives (und wegen der Eindeutigkeit das absolute) Maximum. Es gilt ferner:

$$G(38.73) \approx 961.90 \text{ GE}$$

$p(38.73) \approx 49.61$ GE/ME.

4.

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{K(x)} \cdot K'(x)$$

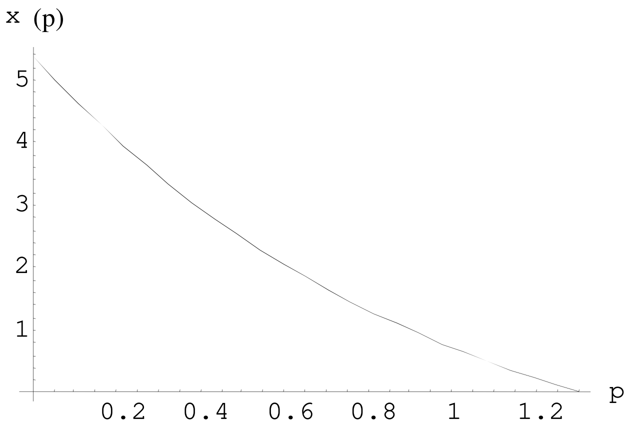
$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{0.01x^3 - 0.01x^2 + 5x + 200} \cdot (0.03x^2 - 0.02x + 5)$$

$$\varepsilon_{K,x}(10) = \frac{10}{259} \cdot 7.8 \approx 0.30\,.$$

Erhöht man die Produktion von 10 Einheiten um 1%, so erhöhen sich die Kosten um etwa 0.30%. Die Kostenfunktion ist an der Stelle $x = 10$ unelastisch.

Aufgabe 5	**25 Punkte**

1.



2.

$$x(p) = \frac{1}{e^{p-2}} - 2 = e^{2-p} - 2$$

$$t = 2 - p\,, \qquad \frac{dt}{dp} = -1$$

$$x(p) = e^t - 2 \qquad \frac{dx(p)}{dt} = e^t$$

$$x'(p) = \frac{dt}{dp} \cdot \frac{dx}{dt} = -e^t = -e^{2-p} < 0\,.$$

Damit ist die Funktion streng monoton fallend.