Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
März 2019

Klausur

Wirtschaftsmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**25 Punkte**

1.
Sei

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_{RZ} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.

$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} = M - M_{RP},$$

$$M_{RZ}^{-1} M_{RZ} \cdot M_{ZP} = M_{RZ}^{-1}\left(M - M_{RP}\right),$$

$$M_{ZP} = M_{RZ}^{-1}\left(M - M_{RP}\right),$$

$$M_{RZ}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{ZP} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

	P_1	P_2
Z_1	1	3
Z_2	2	4

4.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 680 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2	**25 Punkte**

1.
Sei

$x_i,\ i=1,2$: Produktionsmenge P_i.

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 42x_1 + 24x_2 &\rightarrow \max! \\
x_1 + 2x_2 &\le 50 \\
7x_1 + 4x_2 &\le 140 \\
7x_1 + 2x_2 &\le 126 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

2.
Das Dualproblem:

$$
\begin{aligned}
Z = 50\lambda_1 + 140\lambda_2 + 126\lambda_3 &\rightarrow Min! \\
\lambda_1 + 7\lambda_2 + 7\lambda_3 &\ge 42 \\
2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &\ge 24 \\
\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

3.
Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 42x_1 + 24x_2 &\rightarrow \max! \\
x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad &= 50 \\
7x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 140 \\
7x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 126 \\
x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	2	1	0	0	50
x_4	7	4	0	1	0	140
x_5	7	2	0	0	1	126
z	-42	-24	0	0	0	0
x_3	0	$\frac{12}{7}$	1	0	$-\frac{1}{7}$	32
x_4	0	2	0	1	-1	14
x_1	1	$\frac{2}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$	18
z	0	-12	0	0	6	756
x_3	0	0	1	$-\frac{6}{7}$	$\frac{5}{7}$	20
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	16
z	0	0	0	6	**0**	840
x_5	0	0	$\frac{7}{5}$	$-\frac{6}{5}$	1	28
x_2	0	1	$\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	21
x_1	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	8
z	0	0	0	6	0	840

Wir haben eine multiple Optimallösung:

$$x^* = \alpha \begin{pmatrix} 16 \\ 7 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \\ 0 \\ 0 \\ 28 \end{pmatrix}, \quad 0 \le \alpha \le 1, \qquad z^* = 840.$$

$$\lambda^* = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \qquad\qquad Z^* = 840$$

$\lambda_2^* = 6$. Dies bedeutet: Erhöht sich nur die Faktormenge von F_2 von 140 auf 141, so erhöht sich der optimale Gewinn etwa um 6 GE.

4.

Ausgehend vom letzten Tableau und wegen $x_3 = x_4 = 0$ werden die Faktoren F_1 und F_2 hundertprozentig ausgeschöpft.. Bei F_3 beträgt die Auslastung:

$$\frac{28}{126} \cdot 100 \approx 22.2\%$$

Aufgabe 3	**25 Punkte**

1 – 3

$$E_1(p_1, p_2) = (10 - p_1 + 2p_2)\, p_1, \qquad E_2(p_1, p_2) = (8 + 2p_1 - 6p_2)\, p_2$$

$$E(p_1, p_2) = E_1(p_1, p_2) + E_2(p_1, p_2)$$

$$= (10 - p_1 + 2p_2)\, p_1 + (8 + 2p_1 - 6p_2)\, p_2$$

$$= -p_1^2 - 6p_2^2 + 4p_1p_2 + 10p_1 + 8p_2$$

$$K(p_1, p_2) = 4(10 - p_1 + 2p_2) + 2(8 + 2p_1 - 6p_2)$$

$$K(p_1, p_2) = -4p_2 + 56$$

$$G(p_1, p_2) = E(p_1, p_2) - K(p_1, p_2)$$

$$G(p_1, p_2) = -p_1^2 - 6p_2^2 + 4p_1p_2 + 10p_1 + 8p_2 + 4p_2 - 56$$

$$G(p_1, p_2) = -p_1^2 - 6p_2^2 + 4p_1p_2 + 10p_1 + 12p_2 - 56$$

$$G_{p_1}(p_1, p_2) = -2p_1 + 4p_2 + 10$$

$$G_{p_2}(p_1, p_2) = 4p_1 - 12p_2 + 12$$

$$\begin{cases} -2p_1 + 4p_2 + 10 = 0 \\ 4p_1 - 12p_2 + 12 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p_1 = 21, \quad p_2 = 8$$

$$H(p_1, p_2)\begin{pmatrix} G_{p_1p_1}(p_1, p_2) & G_{p_1p_2}(p_1, p_2) \\ G_{p_2p_1}(p_1, p_2) & G_{p_2p_2}(p_1, p_2) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\left(\det H(p_1, p_2) = 24 > 0\right) \ \wedge \ G_{p_1p_1}(p_1, p_2) < 0$$

wird für $p_1 = 21$ GE/ME, $p_2 = 8$ GE/ME der maximale Gewinn erzielt. Die entsprechenden Produktionsmengen lauten:

$$x_1 = 5 \text{ ME}, \qquad x_2 = 2 \text{ ME}$$

Der maximale Gewinn beträgt: $G(21,\ 8) = 97$ GE

B. Wahlaufgaben

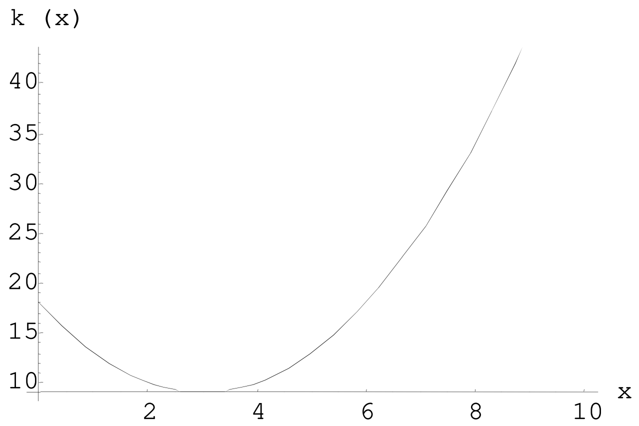
Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 4	**25 Punkte**

1.

$$k(x) = x^2 - 6x + 18, \quad x \le 10$$
$$k'(x) = 2x - 6, \quad x \le 10$$
$$k'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3$$

Damit ist $k(x)$ streng monoton fallend in $]0,\ 3[$ und streng monoton wachsend in $]3,\ 10[$.



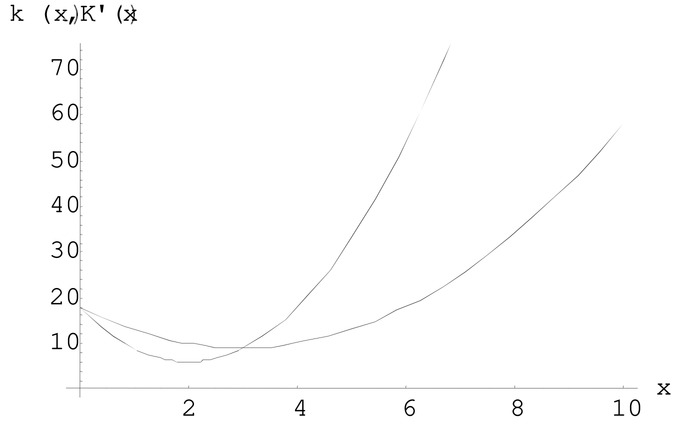
2.

$$2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

Wegen $k''(x) = 2 > 0$ nimmt $k(x)$ ihr absolutes Minimum in $x = 3$ an mit $k(3) = 9$.

3.

$$K'(x) = k(x) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 18 = 3x^2 - 12x + 18 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

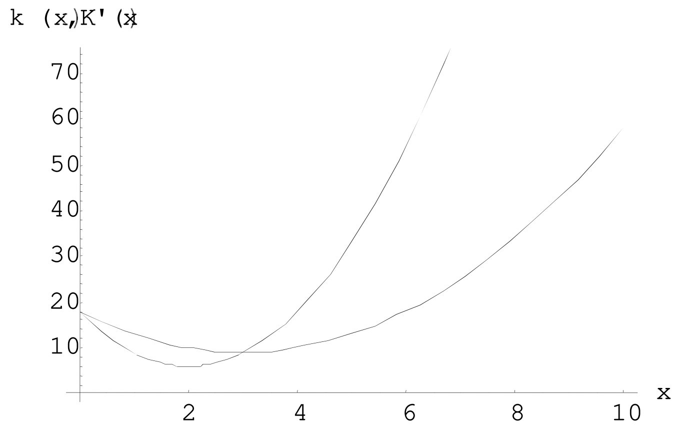


4.

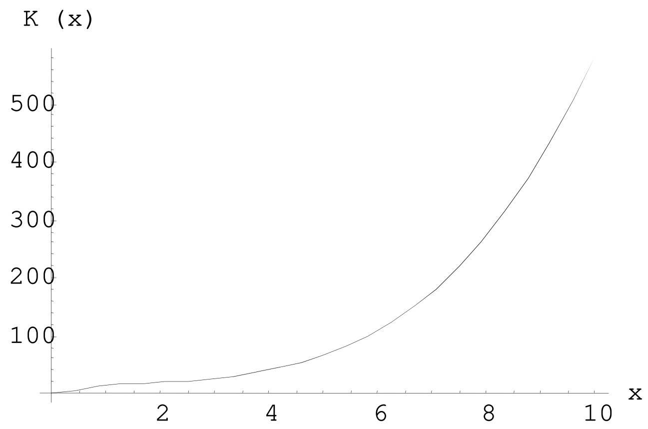
$$K'(x) = 3x^2 - 12x + 18, \qquad K''(x) = 6x - 12$$

$$K''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2 .$$

Damit ist die Funktion $K(x)$ konkav in $]0,\ 2[$ und konvex in $]2,\ 10[$. Die Kosten wachsen degressiv in $]0,\ 2[$ und progressiv in $]2,\ 10[$.



Damit ist die Funktion $K(x)$ konkav in $]0,\ 2[$ und konvex in $]2,\ 10[$. Die Kosten wachsen degressiv in $]0,\ 2[$ und progressiv in $]2,\ 10[$.



5.

$K'(4) \cdot 0.25 = 18 \cdot 0.25 = 4.5$ (approximativ)

$K(4.25) - K(4) = 44.890625 - 40 = 4.890625$ (exakt)

Aufgabe 5	**25 Punkte**

$V(Y) = 35e^{-\frac{15}{Y}},\ Y > 0$

$t = -\frac{15}{Y} = -15Y^{-1}, \qquad \frac{dt}{dY} = 15Y^{-2} = \frac{15}{Y^2}$

$V = 35e^t \qquad \frac{dV}{dt} = 35e^t$

$$\frac{dV}{dY} = \frac{dt}{dY} \cdot \frac{dV}{dt} = 15Y^{-2} \cdot 35e^t = \frac{525}{e^{-\frac{15}{Y}}} > 0.$$

Damit ist die Funktion $V(Y)$ streng monoton wachsend.