Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Februar 2019

Klausur

Wirtschaftsmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**25 Punkte**

Sei

$$M_{ZP} := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_{RP} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix}$$

1.

$$M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

$$M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP} \Big| \cdot M_{ZP}^{-1} \quad \Rightarrow \quad M_{RP} \cdot M_{ZP}^{-1} = M_{RZ} \cdot M_{ZP} \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{RZ} = M_{RP} \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{ZP}^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_{RZ} = = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	4	5

2.
Sei

$r := \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}^T$: Rohstoffbedarfsvektor,
$p := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}^T$: Produktionsvektor.

Dann gilt:

$$r = M_{RP} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2600 \\ 7900 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2	**25 Punkte**

1.
Sei

$x_i, i=1,2$: produzierte Menge nach der Technologie T_i

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
& z = x_1 + x_2 \to Max! \\
& 0.4x_1 + 2x_2 \le 26 \\
& 2.0x_1 \quad + x_2 \le 40 \\
& \qquad\quad 2x_2 \le 24 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0 .
\end{aligned}
$$

2.
Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
& z = x_1 + x_2 \to Max! \\
& 0.4x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad = 26 \\
& 2.0x_1 \quad + x_2 \quad + x_4 \qquad = 40 \\
& \qquad\quad 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 24 \\
& \quad x_i \ge 0,\ i = 1, 2, ..., 5.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	$\frac{2}{5}$	2	1	0	0	26
x_4	2	1	0	1	0	40
x_5	0	2	0	0	1	24
z	-1	-1	0	0	0	0
x_3	0	$\frac{9}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	0	18
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	20
x_5	0	2	0	0	1	24
z	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	20
x_2	0	1	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$	0	10
x_1	1	0	$-\frac{5}{18}$	$\frac{5}{9}$	0	15
x_5	0	0	$-\frac{10}{9}$	$\frac{2}{9}$	1	4
z	0	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	0	25

$$x^* = (15 \quad 10 \quad 0 \quad 0 \quad 4)^T, \qquad z^* = 25 \text{ GE}$$

3.
Von Z_3 bleiben 4 Einheiten übrig, da $x_3 = 4$ ist.

4.
Näherungsweise um $\lambda_1 = \frac{5}{18}$ Einheiten.

Aufgabe 3	**25 Punkte**

1. - 2.

$$L(A,K,\lambda) = A^{0.6}K^{0.25} - \lambda\left(8A + 5K - 680\right) \to \max!$$

$$L_A(A,K,\lambda) = 0.6A^{-0.4}K^{0.25} - 8\lambda$$

$$L_K(A,K,\lambda) = 0.25A^{0.6}K^{-075} - 5\lambda$$

$$\begin{cases} 0.6A^{-0.4}K^{0.25} - 8\lambda = 0 \\ 0.25A^{0.6}K^{-075} - 5\lambda = 0 \\ -\left(8A + 5K - 680\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{0.6A^{-0.4}K^{0.25}}{0.25A^{0.6}K^{-075}} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{0.6K}{0.25A} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad 2A - 3K = 0$$

$$\begin{cases} 8A + 5K = 680 \\ 2A - 3K = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 60, \quad K = 40$$

$$0.6A^{-0.4}K^{0.25} - 8\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.6 \cdot 60^{-0.4} + 40^{0.25} = 8\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda \approx 0.0367$$

$$\bar{H}(A,K) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & -0.24A^{-1.4}K^{0.25} & 0.15A^{-0.4}K^{-0.75} \\ 5 & 0.15A^{-0.4}K^{-0.75} & -0.1875A^{0.6}K^{-1.75} \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}(A=60, K=40) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & -0.0020 & 0.0018 \\ 5 & 0.0018 & -0.0034 \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{H}(A=60, K=40) = 0.4116 > 0$$

Damit wird mit $A = 60$ und $K = 40$ die maximale Produktion von

$$q\left(A=60, K=40\right) = 29.3363$$

Einheiten erzielt.

3.
Eine Erhöhung des Budgets von 680 Einheiten um eine Einheit führt zu einer Erhöhung der maximalen Produktion um etwa 0.0367 Einheiten.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 4	**25 Punkte**

1.

$$K'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 16x + 600, \qquad K'(30) = 420.$$

Eine Erhöhung der Produktion von 30 auf 31 Mengeneinheiten führt zu einer Steigerung der Gesamtkosten um etwa 420 €.

2.

$$K'(x) = 0 \iff \frac{1}{3}x^2 - 16x + 600 = 0 \iff x^2 - 48x + 3800 = 0.$$

Die Gleichung hat keine reellen Lösungen. Damit ist die Kostenfunktion monoton und wegen

$$K(0) = 4000 < K(1) = 4592.11$$

streng monoton wachsen.

$$K''(x) = \frac{2}{3}x - 16,$$

$$K''(x) > 0 \iff \frac{2}{3}x - 16 > 0 \iff x > 24.$$

Damit ist die Kostenfunktion für $x < 24$ degressiv wachsend und für $x > 24$progressiv wachsend.

3.

$$p - 1200 = \frac{1200 - 1250}{50 - 45}(x - 50)$$

$$p(x) = -10x + 1700\,.$$

4.

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$= -10x^2 + 1700x - \frac{1}{9}x^3 + 8x^2 - 600x - 4000$$

$$G(x) = -\frac{1}{9}x^3 - 2x^2 + 1100x - 4000$$

$$\left\langle G'(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 4x + 1100 = 0 \ \wedge \ x \geq 0 \right\rangle \Rightarrow x \approx 51.76$$

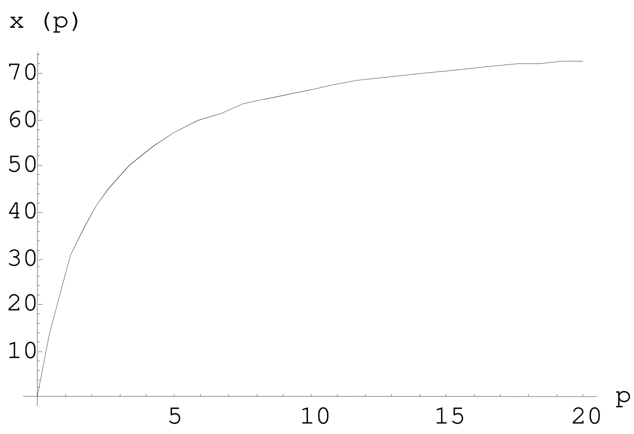
$$G''(x) = -\frac{2}{3}x - 4 < 0, \ \forall x \geq 0\,.$$

Damit erzielt der Monopolist einen maximalen Gewinn für $x \approx 46.31$ ME. Der entsprechende Preis lautet

$$p(51.76) = 1182.40 \text{ €}.$$

Aufgabe 5	**25 Punkte**

1.



2.

$$x(5) = 80 - \frac{160}{5+2} \approx 57.14$$

Bei einem Preis von 5 GE/ME beträgt das Angebot 57.14 GE.

3.

$$x(p) = 80 - \frac{160}{p+2} = 80 - 160(p+2)^{-1}$$

$$x'(p) = \frac{160}{(p+2)^2} > 0.$$

Damit ist die Preis-Absatz-Funktion monoton wachsend.

$$x''(p) = -\frac{320}{(p+2)^3} < 0.$$

Damit ist die Funktion konkav (degressiv wachsend)