Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Februar 2019

Klausur

Wirtschaftsmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**25 Punkte**

Sei

$$M_{RZ} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad M_{RP} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix}$$

1.

$$M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

$$M_{RZ}^{-1} \cdot | \, M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP} \quad \Rightarrow \quad M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RP} = M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

$$M_{ZP} = M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RP}$$

$$M_{RZ}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_{ZP} = = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

	P_1	P_2
Z_1	4	3
Z_2	6	2

2.
Sei

$r := \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}^T$: Rohstoffbedarfsvektor,

$p := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}^T$: Produktionsvektor.

Dann gilt:

$$r = M_{RP} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3700 \\ 11300 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2	**25 Punkte**

1.
Sei

$x_i,\ i=1,2:$ Produktionsmenge E_i

$$\begin{aligned} z = 4x_1 + 5x_2 &\to \max \\ x_1 \quad + x_2 &\le 800 \\ x_1 + 3x_2 &\le 1800 \\ 2x_1 \quad + x_2 &\le 1400 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2.
Die Normalform:

$$\begin{aligned} z = 4x_1 + 5x_2 &\to \max \\ x_1 \quad + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 800 \\ x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 1800 \\ 2x_1 \quad + x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 1400 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,5 & \end{aligned}$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	1	1	0	0	800
x_4	1	**3**	0	1	0	1800
x_5	2	1	0	0	1	1400
z	-4	**-5**	0	0	0	0
x_3	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	600
x_5	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	800
z	$-\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	0	3000
x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	300
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	500
x_5	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	300
z	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3700

$$x^* = (300 \quad 500 \quad 0 \quad 0 \quad 300)^T \qquad z^* = 3700$$

3.

Wegen $x_3 = x_4 = 0$ ist die Auslastung der Maschinen M_1 und M_2 100%; bei der Maschine M_3

$$\frac{1400-300}{1400} \cdot 100 \approx 78.57\% \ .$$

4.

Wegen $\lambda_1^* = \frac{7}{2}$ würde sich der maximale Gewinn um 3.5 Einheiten erhöhen.

Aufgabe 3	**25 Punkte**

Lösung:

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1^{0.75} \cdot x_2^{0.25} - \lambda\left(150x_1 + 250x_2 - 50000\right)$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = 0.75x_1^{-0.25} \cdot x_2^{0.25} - 150\lambda := 0$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = 0.25x_1^{0.75} \cdot x_2^{-0.75} - 250\lambda := 0$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2; \lambda) = -150x_1 - 250x_2 + 50000 := 0$$

$$\frac{0.75x_1^{-0.25} \cdot x_2^{0.25}}{0.25x_1^{0.75} \cdot x_2^{-0.75}} = \frac{-150\lambda}{-250\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x_2}{x_1} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 5x_2$$

$$\begin{cases} 150x_1 + 250x_2 - 50000 = 0 \\ x_1 = 5x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 250, \quad x_2 = 50$$

$$\lambda = 0.003343701525 \approx 0.0.003.$$

$$\bar{H}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 150 & 250 \\ 150 & -\frac{3}{16}x_1^{-1.25}x_2^{0.25} & \frac{3}{16}x_1^{-0.25}x_2^{-0.75} \\ 250 & \frac{3}{16}x_1^{-0.25}x_2^{-0.75} & -\frac{3}{16}x_1^{0.75}x_2^{-1.75} \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}(x_1 = 250, x_2 = 50) \approx \begin{pmatrix} 0 & 150 & 250 \\ 150 & -0.0005 & 0.0025 \\ 250 & 0.0025 & -0.0125 \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{H}(x_1 = 250, x_2 = 50) = 500 > 0$$

Damit wird mit $x_1 = 250$ und $x_2 = 250$ der maximale Nutzen von

$$U(x_1 = 250, x_2 = 50) \approx 167.1851 \text{Einheiten}$$

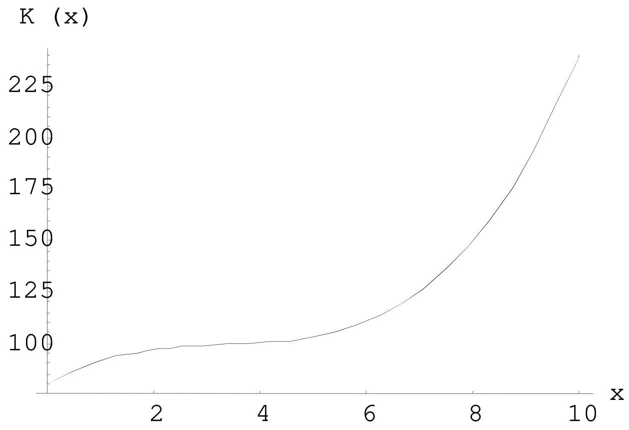
erzielt.

Erhöht man die rechte Seite der Nebenbedingung von 50000 um 1Einheit, so erhöht sich der Nutzen um etwa 0.003 Einheiten.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

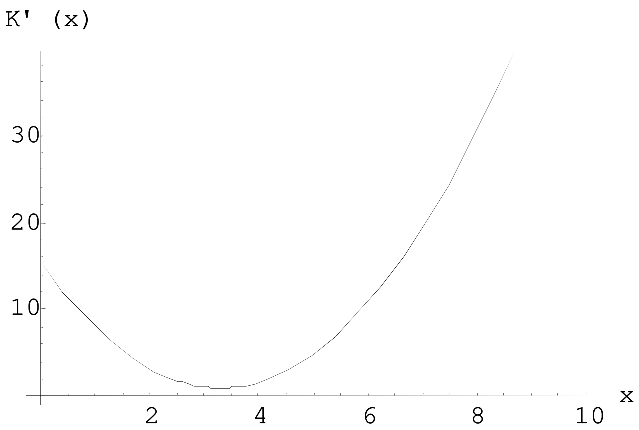
Aufgabe 4	**25 Punkte**



1.

$$K'(x) = 1.3281x^2 - 8.75x + 15.417$$

$$K'(5) = 4.8695\,€$$



Erhöht sich die Produktion von 5 auf 6 ME, so erhöhen sich die Gesamtkosten näherungsweise um 4.8695 €

2.
Wegen

$$(-8.75)^2 - 4 \cdot 1.3281 \cdot 15.417 < 0$$

ist die Gesamtkostenfunktion monoton und wegen

$$K(0) = 80 < 91.4847 = K(1)$$

monoton wachsend.

$$K''(x) = 2.6562x - 8.75$$

$$K''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 3.294179655 \approx 3.29\,,$$

d. h. die Kosten wachsen progressive, fall die Produktion größer ist als 3.29 ME.

3.

$$G(x) = p \cdot x - C(x)$$

$$G(x) = 25x - (0.4427x^3 - 4.375x^2 + 15.417x + 80)$$

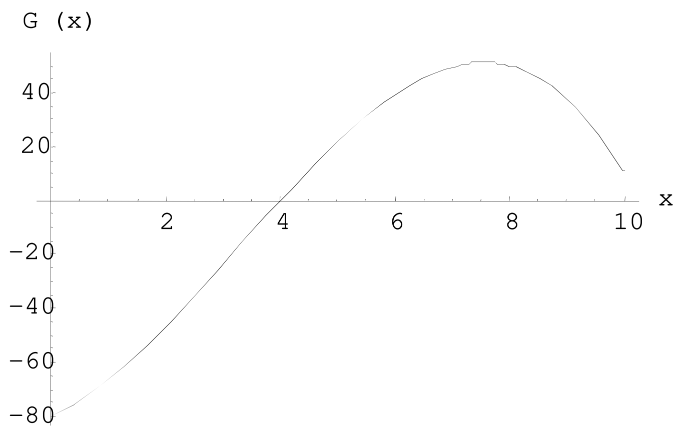
$$G(x) = -0.4427x^3 + 4.375x^2 + 9.5833x - 80$$

$$G'(x) = -1.3281x^2 + 8.75x + 9.5833$$

$$\left(-1.3281x^2 + 8.75x + 9.5833 = 0 \;\wedge\; x \geq 0\right) \;\Rightarrow\; 7.5447$$

$$G''(x) = -2.6562x + 8750\,, \qquad G''(7.5447) = -11.26 < 0\,.$$

Damit erzielt der Betrieb für eine Produktion von 7.5447 ME einen maximalen Gewinn von $G(7.5447) = 51.216$ €.



4.

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{K(x)} \cdot K'(x)$$

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{0.4427x^3 - 4.375x^2 + 15.417x + 80} \cdot \left(1.3281x^2 - 8.75x + 15.417\right)$$

$$\varepsilon_{K,x}(5) = \frac{5}{103.0475} \cdot 4.8695 \approx 0.24\%.$$

Die Kostenfunktion ist für $x = 5$ unelastisch.

Aufgabe 5	**25 Punkte**

1.

$$x(10) = 980.1986733 \approx 980.20\ .$$

2.

$$x'(p) = 3p^2 e^{-\frac{p^2}{5000}} - \frac{p^4 e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500} = -\frac{p^2(p^2 - 7500)e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500}$$

$$\varepsilon_{x,p}(p) = \frac{p \cdot x'(p)}{x(p)} = \frac{-\dfrac{p^3(p^2-7500)e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500}}{p^3 \cdot e^{-\frac{p^2}{5000}}} = \frac{-p^3(p^2-7500)e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500 \cdot p^3 \cdot e^{-\frac{p^2}{5000}}} = \frac{7500 - p^2}{2500}.$$

a) $\varepsilon_{x,p}(70) = 1.04\%$

b)

$$x(70) = 128731.7069$$

$$x(70.7) = 130045.3765$$

$$\frac{x(70.7)}{x(70)} \cdot 100 - 100 = \frac{130045.3765}{128731.7069} \cdot 100 - 100 = 1.021025645\%$$