Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Februar 2018

Klausur

Wirtschaftsmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**25 Punkte**

1.
Sei

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_{RZ} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.

$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} = M - M_{RP},$$

$$M_{RZ}^{-1} M_{RZ} \cdot M_{ZP} = M_{RZ}^{-1} \left(M - M_{RP} \right),$$

$$M_{ZP} = M_{RZ}^{-1} \left(M - M_{RP} \right),$$

$$M_{RZ}^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{ZP} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

	P_1	P_2
Z_1	1	3
Z_2	2	4

4.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 680 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2	**25 Punkte**

1.
Sei

x_1 : Anbaufläche für Erbsen

x_2 : Anbaufläche für Stangenbohnen

Das Modell:

$$
\begin{aligned}
z = 200x_1 + 300x_2 &\to \max!\\
x_1 \quad + x_2 &\le 30\\
x_1 \quad + 2x_2 &\le 50\\
200x_1 + 100x_2 &\le 5000\\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

2.

Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 200x_1 + 300x_2 &\to \max!\\
x_1 \quad + x_2 + x_3 \qquad &= 30\\
x_1 \quad + 2x_2 \quad + x_4 \quad &= 50\\
200x_1 + 100x_2 \qquad + x_5 &= 5000\\
x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	1	1	0	0	30
x_4	1	**2**	0	1	0	50
x_5	200	100	0	0	1	5000
z	-200	-300	0	0	0	0
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	5
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	25
x_5	150	0	0	-50	1	2500
z	-50	0	0	150	0	7500
x_1	1	0	2	-2	0	10
x_2	0	1	-1	$\frac{3}{2}$	0	20
x_5	0	0	-300	250	1	1000
z	0	0	100	50	0	8000

$$x^* = \begin{pmatrix}10 & 20 & 0 & 0 & 1000\end{pmatrix}, \qquad z^* = 8000\,€$$

Aufgabe 3 — 25 Punkte

1.

$$K(15) = 17075\,€.$$

Bei einer Produktion von 15 Mengeneinheiten entstehen Kosten von 17075 €.

2.

$$K'(x) = 6x^2 - 6x + 400\,.$$

Die quadratische Gleichung $6x^2 - 6x + 400 = 0$ hat wegen $\sqrt{36 - 4 \cdot 6 \cdot 400}$ keine reellen Lösungen. Damit ist die Kostenfunktion monoton und wegen

$$\langle x_1 = 1 < 2 = x_2 \rangle \;\Rightarrow\; F(1) = 5399 < 5804 = F(2)$$

streng monoton wachsend.

Andererseits gilt:

$$K''(x) = 12x - 6$$

$$K''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{2}$$

Die Kostenfunktion ist konvex für $x > \frac{1}{2}$ und konkav für $x < \frac{1}{2}$.

Zusammenfassend wachsen die Kosten für $0 < x < \frac{1}{2}$ degressiv und für $x > \frac{1}{2}$ progressive.

3.

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$= 4000x - 33x^2 - (2x^3 - 3x^2 + 400x + 5000)$$

$$G(x) = -2x^3 - 30x^2 + 3600x - 5000$$

$$G'(x) = -6x^2 - 60x + 3600$$

$$\langle -6x^2 - 60x + 3600 = 0 \;\wedge\; x > 0 \rangle \;\Rightarrow\; x = 20$$

$$G''(x) = -12x - 60 < 0, \;\forall x > 0.$$

Damit erzielt der Betrieb einen maximalen Gewinn für eine Produktion von 20 Mengeneinheiten. Der maximale Gewinn beträgt $G(20) = 39000$ €.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 4	**25 Punkte**

1.

$$x_1 = 14 - 0.25 p_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 56 - 4x_1$$
$$x_2 = 24 - 0.5 p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 48 - 2x_2$$

$$E(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 \; R(x_1, x_2) = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2$$

$$= (56 - 4x_1)x_1 + (48 - 2x_2)x_2$$

$$G(x_1, x_2) = E(x_1, x_2) - K(x_1, x_2)$$

$$G(x_1, x_2) = -5x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_1 \cdot x_2 + 56x_1 + 48x_2$$

$$G_{x_1}\left(x_1, x_2\right) = -10x_1 - 5x_2 + 56$$

$$G_{x_2}\left(x_1, x_2\right) = -5x_1 - 6x_2 + 48$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 5x_2 = 56 \\ 5x_1 + 6x_2 = 48 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{96}{35} \approx 2.74, \quad x_2 = \frac{40}{7} \approx 5.71$$

$$G_{x_1x_1} = -10, \quad G_{x_1x_2} = G_{x_2x_1} = -5, \quad G_{x_2x_2} = -6$$

$$\det H = \det \begin{pmatrix} -10 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = 35 > 0, \qquad P_{x_1x_1} < 0\,.$$

Damit ist der Gewinn maximal für $x_1 \approx 2.74,\ x_2 \approx 5.71$.

2.

$$G\left(2.75, 5.70\right) \approx 213.94\,.$$

3.

$$p_1 \approx 45.00, \qquad p_2 \approx 36.60.,$$

Aufgabe 5	**25 Punkte**

1. -2.

$$L(x_1, x_2; \lambda) = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 16x_2 - \lambda\left(0.4x_1 + 0.4x_2 - 3.2\right)$$
$$L_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = -2x_1 + 4 - \lambda$$
$$L_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = -2x_2 + 16 - \lambda$$
$$L_{\lambda}(x_1, x_2; \lambda) = -0.4x_1 - 0.4x_2 + 3.2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 4 - \lambda = 0 \\ -2x_2 + 16 - \lambda = 0 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 + 3.2 = 0 \end{cases}$$

$$\left\langle -2x_1 + 4 - \lambda = -2x_2 + 16 - \lambda \right\rangle \iff -2x_1 + 2x_2 = 14$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 12 \\ \;\; - x_1 \;\; - x_2 = -8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 7$$

$$-2x_1 + 4 - \lambda = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -2 + 4 = 2$$

$$\det \bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & -2 & 0 \\ 0.4 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0.64 > 0$$

Eine Erhöhung des Budgets von 3.20 GE um eine Einheit bewirkt eine Erhöhung des Nutzens um etwa 2 Einheiten