Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Februar 2018

Klausur

Wirtschaftsmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**25 Punkte**

1.
Sei

$$M_{RP} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M_{ZP} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}.$$

2.

$$M = M_{RP} + M_{RZ} \cdot M_{ZP}.$$

3.

$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} = M - M_{RP},$$

$$M_{RZ} \cdot M_{ZP} \cdot M_{ZP}^{-1} = \left(M - M_{RP}\right) \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{RZ} = \left(M - M_{RP}\right) \cdot M_{ZP}^{-1}$$

$$M_{ZP}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{RZ} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

	Z_1	Z_2
R_1	0	2
R_2	1	5

4.

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 14 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 282 \\ 766 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2	**25 Punkte**

Sei

x_1 : die Anbaufläche für Kartoffel [ha]

x_2 : die Anbaufläche für Roggen [ha]

1.

$$
\begin{aligned}
z = 20x_1 + 60x_2 &\rightarrow \max!\\
5x_1 + 10x_2 &\le 7000\\
2x_1 + 10x_2 &\le 5200\\
x_1 \quad + x_2 &\le 1200\\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

2.
Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
&z = 20x_1 + 60x_2 \rightarrow \max!\\
&5x_1 + 10x_2 + x_3 = 7000\\
&2x_1 + 10x_2 + x_4 = 5200\\
&x_1 + x_2 + x_5 = 1200\\
&x_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

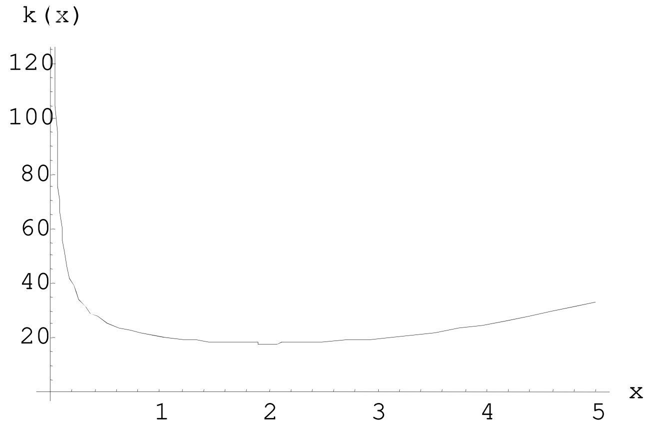
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	5	10	1	0	0	7000
x_4	2	**10**	0	1	0	5200
x_5	1	1	0	0	1	1200
z	-20	**-60**	0	0	0	0
x_3	3	0	1	-1	0	1800
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{1}{10}$	0	520
x_5	$\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{1}{10}$	1	680
z	-8	0	0	6	0	31200
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	600
x_2	0	1	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{6}$	0	400
x_5	0	0	$-\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$	1	200
z	0	0	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	36000

$$x^* = \begin{pmatrix}600 & 400 & 0 & 0 & 200\end{pmatrix}^T, \quad z^* = 3600$$

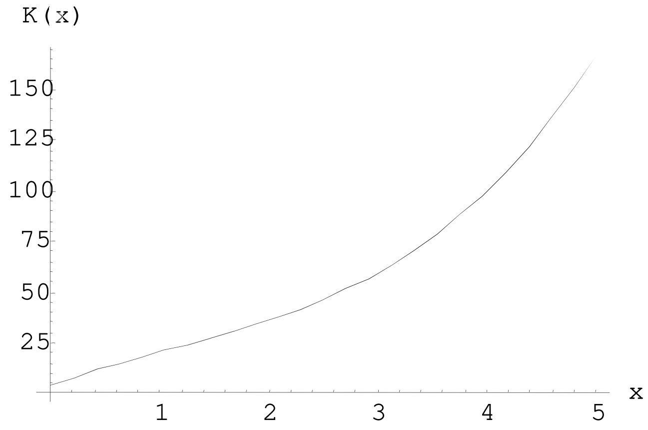
3.
Wegen $x_4 = 0$ ist die Auslastungsgrad 100%.

Aufgabe 3	25 Punkte

1.



$$K(x) = 1.5x^3 - 5x^2 + 20x + 4 \quad x \in \left]0,\ 5\right]$$



$$K'(x) = 4.5x^2 - 10x + 20 \quad x \in \left]0,\ 5\right]$$

$$K'(3) = 30.5$$

Eine Erhöhung der Produktion von 3 auf 4 ME steigert die Kosten um etwa 30.5 GE.

2.

$$U(x) = 20.50x$$

$$G(x) = -1.5x^3 + 5x^2 + 0.5x - 4, \quad x \in \left]0,\ 5\right]$$

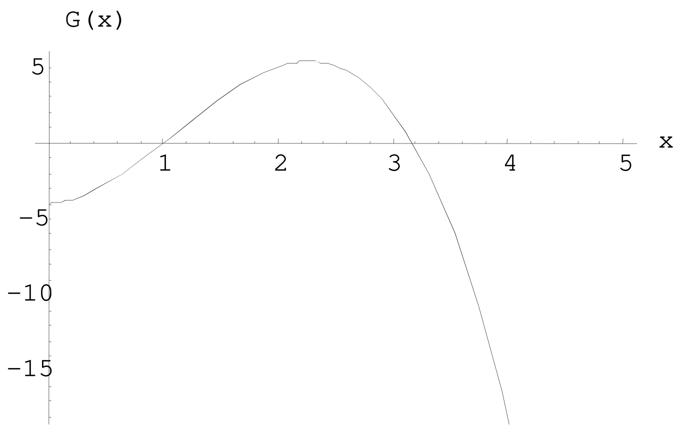
$$G'(x) = -4.5x^2 + 10x + 0.5, \quad x \in \left]0,\ 5\right]$$

$$\left\langle G'(x) = 0 \ \wedge \ x \in \left]0,\ 5\right] \right\rangle \ \Rightarrow \ x \approx 2.2711\,\text{ME}$$

$$G''(x) = -9x + 10, \quad x \in \left]0,\ 5\right], \qquad G''(2.2711) < 0.$$

Damit ist der Gewinn maximal für $x \approx 2.2711$ ME.

$$G(2.2711) \approx 5.3539 \ \text{GE}.$$



3.
i)

$$\varepsilon_{G,x}(x) = \frac{x \cdot \left(-4.5x^2 + 10x + 0.5\right)}{-1.5x^3 + 5x^2 + 0.5x - 4}, \quad x \in \left]0,\ 5\right],$$

$$\varepsilon_{G,x}(1.5) = \frac{1.5 \cdot 5.375}{2.9375} \approx 2.7447\%, \quad x \in \left]0,\ 5\right]$$

Erhöht sich die Produktion von 1.5 ME um 1%, so erhöht sich der Gewinn näherungsweise um 2.7447 %.

ii)

$$\frac{G(1.5 \cdot 1.01)}{G(1.5)} \cdot 100 - 100 = \frac{3.0177}{2.9375} \cdot 100 - 100 \approx 2.7302\,\%$$

Die Näherung mithilfe der Elastizität ist sehr gut.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 4	**25 Punkte**

$$G(x_1, x_2) = (55 - x_1 - x_2)x_1 + (70 - x_1 - 2x_2)x_2 - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \to Max!$$

$$G(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_1x_2 + 55x_1 + 70x_2 \to Max!$$

$$G_{x_1}(x_1, x_2) = -4x_1 - 3x_2 + 55$$

$$G_{x_2}(x_1, x_2) = -3x_1 - 6x_2 + 70$$

$$\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + 55 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 + 70 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x_1 = 8.00, \quad x_2 = \frac{23}{3} \approx 7.67$$

$$\det H = \det\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = 15 > 0, \quad G_{x_1x_1} = -4$$

Daher ist der Gewinn des Betriebs maximal, wenn 8.00 ME von P_1 und 7.67 ME von P_2 produziert werden.

2.

$$G(x_1 = 8.00, x_2 = 7.67) = 488.33 \text{ GE.}$$

3.

$$p_1 = 39.33 \text{ GE}, \quad p_2 = 46.67 \text{ GE}$$

Aufgabe 5	**25 Punkte**

1.

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1x_2 + x_1 + 2x_2 - \lambda\left(2x_1 + 5x_2 - 51\right)$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = x_2 + 1 - 2\lambda$$
$$L_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = x_1 + 2 - 5\lambda$$
$$L_{\lambda}(x_1, x_2; \lambda) = -\left(2x_1 + 5x_2 - 51\right)$$

$$\begin{cases} x_2 + 1 - 2\lambda = 0 \\ x_1 + 2 - 5\lambda = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 51 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 + 1 - 2\lambda = 0 \\ x_1 + 2 - 5\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = x_2 + 1 \\ 5\lambda = x_1 + 2 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - 5x_2 = 1$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 = 51 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 13, \quad x_2 = 5$$

$$2\lambda = -x_2 - 1 = -5 - 1, \quad \lambda = -3.$$

$$\det \bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 20 > 0$$

damit ist der Nutzen maximal für $x_1 = 13$ und $x_2 = 5$.
2.

Eine Erhöhung der recht5en Seite 51 um eine Einheit bewirkt eine Erhöhung des Nutzens um etwa 3 Einheiten.