Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Februar2017

Klausur

Wirtschaftmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**40 Punkte**

1.
Sei

x_1 : Anzahl der Stühle; x_2 : Anzahl der Tische; x_3 : Anzahl der Regale.

<u>Das Modell</u>:

$$
\begin{aligned}
&z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \to \max!\\
&6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 200\\
&6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \le 400\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0: \text{ ganz}
\end{aligned}
$$

2.
<u>Die Normalform</u>:

$$
\begin{aligned}
&z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \to \max!\\
&6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 200\\
&6x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 400\\
&x_1, x_2, x_3 \ge 0: \text{ ganz};\\
&x_4, x_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_4	6	2	2	1	0	200
x_5	6	6	2	0	1	400
z	-60	-30	-20	0	0	0
x_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{100}{3}$
x_5	0	4	0	-1	1	200
z	0	$-\frac{50}{3}$	$-\frac{25}{3}$	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{4000}{3}$
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{50}{3}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{50}{3}$
z	0	0	$-\frac{20}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{6500}{3}$
x_3	3	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	50
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	50
z	0	0	0	$\frac{15}{2}$	$\frac{5}{2}$	2500

$$x^* = \begin{pmatrix}0 & 50 & 50 & 0 & 0\end{pmatrix}^T, \qquad z^* = 2500.$$

Wegen $x_4 = x_5 = 0$ ist der Auslastungsgrad sowohl für Kreissäge als auch Bandsäge 100%.

Aufgabe 2 **30 Punkte**

1.

$$K'(x) = 0.03x^2 - 0.02x + 5$$

$$K'(1000) = 29985..$$

Erhöht man die Produktion von 1000 Einheiten um eine Einheit, so erhöhen sich die Kosten um etwa 29986 Geldeinheiten.

2.Die Gleichung $0.03x^2 - 0.02x + 5 = 0$ hat wegen $b^2 - 4ac = (-0.02)^2 - 4 \cdot 0.03 \cdot 5 < 0$ keine reellen Lösungen. Daher muss die Kostenfunktion monoton sein.
Ferner ist wegen

$$\left(x_1 = 0 < 1 = x_2\right) \quad \Rightarrow \quad \left(F(x_1) = 200 < 205 = F(x_2)\right)$$

die Kostenfunktion streng monoton wachsend.
Wegen

$$K''(x) = 0.06x - 0.02 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{3}$$

ist die Kostenfunktion für $x > \frac{1}{3}$ konvex.

<u>Zusammenfassend</u>: Die Kosten wachsen für $0 < x < \frac{1}{3}$ degressiv und für $x > \frac{1}{3}$ progressiv.

3.

$$U(x) = p(x) \cdot x = 50x - 0.01x^2$$

$$G(x) = U(x) - K(x)$$

$$G(x) = 50x - 0.01x^2 - (0.01x^3 - 0.01x^2 + 5x + 200)$$

$$G(x) = -0.01x^3 + 45x - 200$$

$$G'(x) = -0.03x^2 + 45$$

$$\left(-0.03x^2 + 45 = 0 \;\wedge\; x \geq 0\right) \;\Rightarrow\; x \approx 38.73$$

$$G''(x) = -0.06x < 0 \text{ für } \forall x > 0.$$

Daher nimmt die Gewinnfunktion an der Stelle $x \approx 38.73$ ein relatives (und wegen der Eindeutigkeit das absolute) Maximum. Es gilt ferner:

$$G(38.73) \approx 961.90 \text{ GE}$$
$$p(38.73) \approx 49.61 \text{ GE/ME.}$$

4.

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{K(x)} \cdot K'(x)$$

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{0.01x^3 - 0.01x^2 + 5x + 200} \cdot (0.03x^2 - 0.02x + 5)$$

$$\varepsilon_{K,x}(10) = \frac{10}{259} \cdot 7.8 \approx 0.30\,.$$

Erhöht man die Produktion von 10 Einheiten um 1%, so erhöhen sich die Kosten um etwa 0.30%. Die Kostenfunktion ist an der Stelle $x = 10$ unelastisch.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 3	**30 Punkte**

1. - 3.

$$G(p_1,p_2) = 850p_1 - 36p_1^2 + 15p_1p_2 + 1075p_2 + 20p_1p_2 - 25p_2^2 - 30p_1 - 40p_2$$

$$= -36p_1^2 - 25p_2^2 + 35p_1p_2 + 820p_1 + 1035p_2\,.$$

$$G_{p_1}(p_1,p_2) = -72p_1 + 35p_2 + 820 := 0$$

$$G_{p_2}(p_1,p_2) = 35p_1 - 50p_2 + 1035 := 0$$

$$\begin{cases} -72p_1 + 35p_2 + 820 := 0 \\ 35p_1 - 50p_2 + 1035 := 0 \end{cases} \Leftrightarrow p_1 = 32.51579, \quad p_2 = 43.461052$$

$$\det H = \begin{pmatrix} -72 & 35 \\ 35 & -50 \end{pmatrix} > 0 \quad \wedge \quad G_{p_1p_1}(p_1,p_2) < 0.$$

Damit wäre der maximale Gewinn für $p_1 = 32.51579,\ p_2 = 43.461052$ erzielt.

$x_1 = 331.34734$, $\qquad x_2 = 638.7895$

Aufgabe 4	**30 Punkte**

Lösung:

1. - 2.

$$L(A,K,\lambda) = A^{0.6}K^{0.25} - \lambda\left(8A + 5K - 680\right) \to \max!$$

$$L_A(A,K,\lambda) = 0.6A^{-0.4}K^{0.25} - 8\lambda$$

$$L_K(A,K,\lambda) = 0.25A^{0.6}K^{-075} - 5\lambda$$

$$L_\lambda(A,K) = -\left(8A + 5K - 680\right)$$

$$\begin{cases} 0.6A^{-0.4}K^{0.25} - 8\lambda = 0 \\ 0.25A^{0.6}K^{-075} - 5\lambda = 0 \\ -\left(8A + 5K - 680\right) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{0.6A^{-0.4}K^{0.25}}{0.25A^{0.6}K^{-075}} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{0.6K}{0.25A} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad 2A - 3K = 0$$

$$\begin{cases} 8A + 5K = 680 \\ 2A - 3K = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 60, \quad K = 40$$

$$0.6A^{-0.4}K^{0.25} - 8\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.6 \cdot 60^{-0.4} + 40^{0.25} = 8\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda \approx 0.0367$$

$$\bar{H}(A,K) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & -0.24A^{-1.4}K^{0.25} & 0.15A^{-0.4}K^{-0.75} \\ 5 & 0.15A^{-0.4}K^{-0.75} & -0.1875A^{0.6}K^{-1.75} \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}(A=60, K=40) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & -0.0020 & 0.0018 \\ 5 & 0.0018 & -0.0034 \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{H}(A=60, K=40) = 0.4116 > 0$$

Damit wird mit $A = 60$ und $K = 40$ die maximale Produktion von

$$q\left(A=60, K=40\right) = 29.3363$$

Einheiten erzielt.

3.
Eine Erhöhung des Budgets von 680 Einheiten um eine Einheit führt zu einer Erhöhung der maximalen Produktion um etwa 0.0367 Einheiten.