Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Februar2017

Klausur

Wirtschaftmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**40 Punkte**

Sei

$x_i,\ i=1,2$: Anzahl Modell M_i.

1.
Das Modell:

$$
\begin{aligned}
&z = 1979x_1 + 1280x_2 \to Max!\\
&6x_1 + 10x_2 \le 250\\
&7x_1 + 2x_2 \le 166\\
&4x_1 + 2x_2 \le 115\\
&x_1, x_2 \ge 0: \text{ ganzzahlig.}
\end{aligned}
$$

2.
Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
&z = 1979x_1 + 1280x_2 \to Max!\\
&6x_1 + 10x_2 + x_3 = 250\\
&7x_1 + 2x_2 + x_4 = 166\\
&4x_1 + 2x_2 + x_5 = 115\\
&x_i \ge 0,\ i = 1,2,\dots,5.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	6	10	1	0	0	250
x_4	7	2	0	1	0	166
x_5	4	2	0	0	1	115
z	-1979	-1280	0	0	0	0
x_3	0	$\frac{58}{7}$	1	$-\frac{6}{7}$	0	$\frac{754}{7}$
x_1	1	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{166}{7}$
x_5	0	$\frac{6}{7}$	0	$-\frac{4}{7}$	1	$\frac{141}{7}$
z	0	$-\frac{5002}{7}$	0	$\frac{1979}{7}$	0	$\frac{328514}{7}$
x_2	0	1	$\frac{7}{58}$	$-\frac{3}{29}$	0	13
x_1	1	0	$-\frac{1}{29}$	$\frac{5}{29}$	0	20
x_5	0	0	$-\frac{3}{29}$	$-\frac{14}{29}$	1	9
z	0	0	$\frac{2501}{29}$	$\frac{6055}{29}$	0	56220

$$x^* = \begin{pmatrix} 20 & 13 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}^T, \qquad z^* = 56220 \text{ GE}$$

3.
Keine, da $x_4 = 0$ ist.

Aufgabe 2	30 Punkte

1.

$$U(x) = p(x)\cdot x = 222x - 6x^2$$

$$G(x) = U(x) - K(x) = 222x - 6x^2 - (293 + 159x - 12x^2 + x^3)$$

$$G(x) = -x^3 + 6x^2 + 63x - 293$$

$$G'(x) = -3x^2 + 12x + 63$$

$$\left(G'(x) = 0 \ \wedge \ x \geq 0\right) \ \Rightarrow \ x = 7$$

$$G''(x) = -6x + 12, \qquad G''(7) = -30 < 0.$$

Damit der Gewinn maximal, wenn 7 Mengeneinheiten produziert werden.
De maximale Gewinn beträgt:

$$G(7) = 99\,\text{GE}.$$

Dafür muss der Preis $p(7) = 180$ GE betragen.

2.

$$K(x) = 293 + 159x - 12x^2 + x^3, \ x > 0$$

$$K'(x) = 159 - 24x + 3x^2, \ x > 0\,.$$

Wegen

$$x_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4\cdot 3\cdot 159}}{6} = \frac{24 \pm \sqrt{-1332}}{6}$$

hat die Kostenfunktion keine Extrema.
Andererseits gilt

$$\left\langle x_1 = 1 < 2 = x_2 \right\rangle \ \Rightarrow \ \left\langle K(x_1) = 441 < 571 = K(x_2) \right\rangle.$$

Daher ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend.

$$K''(x) = -24 + 6x, \ x > 0$$

$$K''(x) > 0 \ \Leftrightarrow \ 6x > 24 \ \Leftrightarrow \ x > 4.$$

Damit wachsen die Kosten degressiv für $0 < x < 4$; sie wachsen progressiv für $x > 4$.

3.

$$\varepsilon_{K,x}(x) = \frac{x}{K(x)}\cdot K'(x)$$

$$= \frac{x\cdot(159 - 24x + 3x^2)}{293 + 159x - 12x^2 + x^3}$$

$$\varepsilon_{K,x}(8) = \frac{8 \cdot (159 - 24x + 3x^2)}{293 + 159x - 12x^2 + x^3} = \frac{8 \cdot 159}{1309} \approx 0.9717\%$$

Erhöht sich die Produktion von 8 ME um 1%, so erhöhen sich die Kosten um etwa 0.9717%.
Die Kostenfunktion ist für einen Output von 8 ME unelastisch.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 3	**30 Punkte**

1 – 3

$$E_1(p_1,p_2)=\left(10-p_1+2p_2\right)p_1, \qquad E_2(p_1,p_2)=\left(8+2p_1-6p_2\right)p_2$$

$$E(p_1,p_2)=E_1(p_1,p_2)+E_2(p_1,p_2)$$

$$=\left(10-p_1+2p_2\right)p_1+\left(8+2p_1-6p_2\right)p_2$$

$$=-p_1^2-6p_2^2+4p_1p_2+10p_1+8p_2$$

$$K(p_1,p_2)=4\left(10-p_1+2p_2\right)+2\left(8+2p_1-6p_2\right)$$

$$K(p_1,p_2)=-4p_2+56$$

$$G(p_1,p_2)=E(p_1,p_2)-K(p_1,p_2)$$

$$G(p_1,p_2)=-p_1^2-6p_2^2+4p_1p_2+10p_1+8p_2+4p_2-56$$

$$G(p_1,p_2)=-p_1^2-6p_2^2+4p_1p_2+10p_1+12p_2-56$$

$$G_{p_1}(p_1,p_2)=-2p_1+4p_2+10$$

$$G_{p_2}(p_1,p_2)=4p_1-12p_2+12$$

$$\begin{cases}-2p_1+4p_2+10=0\\ 4p_1-12p_2+12=0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad p_1=21, \quad p_2=8$$

$$H(p_1,p_2)\begin{pmatrix}G_{p_1p_1}(p_1,p_2) & G_{p_1p_2}(p_1,p_2)\\ G_{p_2p_1}(p_1,p_2) & G_{p_2p_2}(p_1,p_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -12\end{pmatrix}$$

Wegen

$$\left(\det H(p_1,p_2)=24>0\right) \wedge G_{p_1p_1}(p_1,p_2)<0$$

wird für $p_1=21$ GE/ME, $p_2=8$ GE/ME der maximale Gewinn erzielt. Die entsprechenden Produktionsmengen lauten:

$$x_1 = 5 \text{ ME}, \qquad x_2 = 2 \text{ ME}$$

Der maximale Gewinn beträgt: $G(21,\ 8) = 97$ GE

Aufgabe 4	**30 Punkte**

Lösung:

$$L(x_1, x_2; \lambda) = x_1^{0.75} \cdot x_2^{0.25} - \lambda\left(150x_1 + 250x_2 - 50000\right)$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = 0.75x_1^{-0.25} \cdot x_2^{0.25} - 150\lambda := 0$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = 0.25x_1^{0.75} \cdot x_2^{-0.75} - 250\lambda := 0$$

$$L_\lambda(x_1, x_2; \lambda) = -150x_1 - 250x_2 + 50000 := 0$$

$$\frac{0.75x_1^{-0.25} \cdot x_2^{0.25}}{0.25x_1^{0.75} \cdot x_2^{-0.75}} = \frac{-150\lambda}{-250\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x_2}{x_1} = \frac{3}{5} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 5x_2$$

$$\begin{cases} 150x_1 + 250x_2 - 50000 = 0 \\ x_1 = 5x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 250, \quad x_2 = 50$$

$$\lambda = 0.003343701525 \approx 0.0.003.$$

$$\bar{H}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 150 & 250 \\ 150 & -\frac{3}{16}x_1^{-1.25}x_2^{0.25} & \frac{3}{16}x_1^{-0.25}x_2^{-0.75} \\ 250 & \frac{3}{16}x_1^{-0.25}x_2^{-0.75} & -\frac{3}{16}x_1^{0.75}x_2^{-1.75} \end{pmatrix}$$

$$\bar{H}(x_1 = 250, x_2 = 50) \approx \begin{pmatrix} 0 & 150 & 250 \\ 150 & -0.0005 & 0.0025 \\ 250 & 0.0025 & -0.0125 \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{H}(x_1 = 250, x_2 = 50) = 500 > 0$$

Damit wird mit $x_1 = 250$ und $x_2 = 250$ der maximale Nutzen von

$$U(x_1 = 250, x_2 = 50) \approx 167.1851 \text{ Einheiten}$$

erzielt.

Erhöht man die rechte Seite der Nebenbedingung von 50000 um 1Einheit, so erhöht sich der Nutzen um etwa 0.003 Einheiten.