Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Mäez2017

Klausur

Wirtschaftmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**40 Punkte**

1.
Das Modell:

Sei

x_i : Längeneinheit von T_i, $i = 1, 2.$

$$
\begin{aligned}
z = 30x_1 + 50x_2 &\to Max! \\
3x_1 + 8x_2 &\le 550 \\
2x_1 + x_2 &\le 280 \\
3x_2 &\le 150 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

2.
Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
z = 30x_1 + 50x_2 &\to Max! \\
3x_1 + 8x_2 + x_3 &= 550 \\
2x_1 + x_2 + x_4 &= 280 \\
3x_2 + x_5 &= 150 \\
x_i \ge 0,\ i &= 1, 2, ..., 5.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	3	8	1	0	0	550
x_4	2	1	0	1	0	280
x_5	0	3	0	0	1	150
z	-30	-50	0	0	0	0
x_3	3	0	1	0	$-\frac{8}{3}$	150
x_4	2	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	230
x_2	0	1	0	0	$\frac{1}{3}$	50
z	-30	0	0	0	$\frac{50}{3}$	2500
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{8}{9}$	50
x_1	0	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	130
x_2	0	1	0	0	$-\frac{8}{3}$	50
z	0	0	10	0	-10	4000
x_1	1	0	$-\frac{1}{13}$	$\frac{8}{13}$	0	130
x_5	0	0	$-\frac{6}{13}$	$\frac{9}{13}$	1	90
x_2	0	1	$\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{13}$	0	20
z	0	0	$\frac{70}{13}$	$\frac{90}{13}$	0	4900

$x^* = (130 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 90)^T, \qquad z^* = 4900 - 1200 = 4700$

Aufgabe 2	**30 Punkte**

1.

$$K'(x) = 3x^2 - 8x + 21$$

$$\left(3x^2 - 8x + 21 = 0 \ \wedge \ x \in R_+\right) \ \Rightarrow \ x \in \varnothing.$$

D. h. die Funktion $K(x)$ hat keine relativen Extrema. Wegen $K(1) = 21 < 37 = K(2)$ ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend:

2.

$$x(p) = \frac{15}{2} - \frac{1}{16} p \quad \Rightarrow \quad p(x) = 120 - 16x.$$

$$E(x) = x.p(x)$$

$$= 120x - 16x^2.$$

$$G(x) = E(x) - K(x)$$

$$= -x^3 - 12x^2 + 99x - 3.$$

$$G'(x) = -3x^2 - 24x + 99\ ,$$
$$\left(-3x^2 - 24x + 99 = 0 \ \wedge \ x \geq 0\right) \quad \Rightarrow \quad x = 3,$$

$$G''(x) = -6x - 24\ .$$

Wegen $G''(3) < 0$ ist der Gewinn maximal für $x = 3$. Der maximale Gewinn beträgt $G(3) = 159$ GE.

3.

$$K'(4) = 37 \text{ GE.}$$

Erhöht sich die Produktion von 4 ME auf 5 ME, so erhöhen sich die Kosten um etwa 37 GE.

4.

$$\varepsilon_{G,x}(x) = \frac{x}{-x^3 - 12x^2 + 99x - 3} \cdot \left(-3x^2 - 24x + 99\right),$$

$$\varepsilon_{G,x}(4) \approx -1.31\,.$$

Erhöht man die Produktion von 4 ME um 1%, so reduziert sich die Produktion um etwa 1.31%. Damit ist die Gewinnfunktion an der Stelle $x = 4$ elastisch.

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 3	**30 Punkte**

1.

$$x_1 = 21 - 0.1 p_1 \quad \Rightarrow \quad p_1 = 210 - 10 x_1$$

$$x_2 = 50 - 0.41 p_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 125 - 2.5 x_2$$

$$K\left(x_1, x_2\right) = 200 + 10x_1 + 10x_2$$

$$G(x_1, x_2) = (210 - 10x_1)x_1 + (125 - 2.5x_2)x_2 - \left(2000 + 10x_1 + 10x_2\right)$$

$$G(x_1, x_2) = -10x_1^2 - 2.5x_2^2 + 200x_1 + 115x_2 - 2000$$

$$G_{x_1}(x_1, x_2) = -20x_1 + 200$$

$$G_{x_2}(x_1, x_2) = -5x_2 + 115$$

$$\left\langle G_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \ \wedge \ G_{x_1}(x_1, x_2) = 0 \right\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle x_1 = 10, \ x_2 = 23 \right\rangle$$

Wegen

$$\det H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} G_{x_1 x_1}(x_1, x_2) & G_{x_1 x_2}(x_1, x_2) \\ G_{x_2 x_1}(x_1, x_2) & G_{x_2 x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -20 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} > 0$$

und

$$G_{x_1 x_1}(x_1, x_2) < 0$$

ist der Gewinn für $x_1 = 10, \ x_2 = 23$ maximal.

2.

$$G(10, 23) = 322.50$$

3.

$$p_1\left(10\right) = 110\,, \qquad p_2\left(23\right) = 67.60$$

Aufgabe 4	**30 Punkte**

$$L(x_1, x_2; \lambda) = \sqrt{x_1} + x_2 - \lambda\left(x_1 + 4x_2 - 100\right)$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2; \lambda) = \frac{1}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} - \lambda := 0$$
$$L_{x_2}(x_1, x_2; \lambda) = 1 - 4\lambda := 0$$
$$L(x_1, x_2; \lambda) = -\left(x_1 + 4x_2 - 100\right) := 0$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 24, \quad \lambda = \frac{1}{4}.$$

$$\det \bar{H}(x_1, x_2) = \det \bar{H}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -\frac{1}{4} x_1^{-\frac{3}{2}} & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{H}(x_1, x_2) = \det \bar{H}(x_1 = 4, x_2 = 24) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & -\frac{1}{32} & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} > 0$$

Eine Erhöhung der rechten Seite der Nebenbedingung bewirkt eine Erhöhung des optimalen Nutzens um ungefähr 0.25 Einheiten.