Dr. sc. Siassi
HTW Berlin
Februar2016

Klausur

Wirtschaftmathematik

A. Pflichtaufgaben

Aufgabe 1	**25 Punkte**

Sei

$x_i,\ i = 1,2,3:$ die Produktionsmenge P_i

Das Modell:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 17 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10\,, \qquad\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

1.

x_1	x_2	x_3	x_0
3	2	1	17
1	1	1	10
2	1	0	7
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{17}{3}$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$
0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{13}{3}$
1	0	-1	-3
0	1	2	13
0	0	0	0

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 &= -3 \\ x_2 + 2x_3 &= 13, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} x_1 &= -3 + x_3 \geq 0 \\ x_2 &= 13 - 2x_3 \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3 \leq x_3 \leq \frac{13}{2} \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

2.

$$x_3 := 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3$$

$$x_3 := 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1$$

Aufgabe 2 **25 Punkte**

1.
Sei

$x_i,\ i=1,2:$ Produktionsmenge E_i

$$\begin{aligned} z = 4x_1 + 5x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 &\le 800 \\ x_1 + 3x_2 &\le 1800 \\ 2x_1 + x_2 &\le 1400 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2.
Die Normalform:

$$\begin{aligned} z = 4x_1 + 5x_2 &\to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 &= 1800 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 1400 \\ x_i \ge 0,\ i &= 1,2,...,5 \end{aligned}$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0
x_3	1	1	1	0	0	800
x_4	1	**3**	0	1	0	1800
x_5	2	1	0	0	1	1400
z	-4	**-5**	0	0	0	0
x_3	$\frac{2}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	200
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	0	600
x_5	$\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	800
z	$-\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$	0	3000
x_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	300
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	500
x_5	0	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	300
z	0	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3700

$$x^* = \begin{pmatrix} 300 & 500 & 0 & 0 & 300 \end{pmatrix}^T \qquad z^* = 3700$$

3.

Wegen $x_3 = x_4 = 0$ ist die Auslastung der Maschinen M_1 und M_2 100%; bei der Maschine M_3

$$\frac{1400 - 300}{1400} \cdot 100 \approx 78.57\% \ .$$

4.

Wegen $\lambda_1^* = \frac{7}{2}$ würde sich der maximale Gewinn um 3.5 Einheiten erhöhen.

Aufgabe 3	**25 Punkte**

1.

$$G(x_1, x_2) = U(x_1, x_2) - K(x_1, x_2)$$

$$= -2x_1^2 - x_2^2 - x_1 x_2 + 200x_1 + 160x_2 - (2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_1 x_2 + 100)$$

$$G(x_1, x_2) = -4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_1 x_2 + 200x_1 + 160x_2 - 100 \to \max$$

unter der Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 = 30, \quad x_1, x_2 \geq 0$$

2.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^2 - 4x_2^2 - 4x_1 x_2 + 200x_1 + 160x_2 - 100 - \lambda(x_1 + x_2 - 30) \to \max$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = -8x_1 - 4x_2 + 200 - \lambda$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = -4x_1 - 8x_2 + 160 - \lambda$$

$$L_\lambda(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 30$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 + 200 - \lambda = 0 \\ -4x_1 - 8x_2 + 160 - \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 30 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 + 200 - \lambda = 0 \\ -4x_1 - 8x_2 + 160 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow -8x_1 - 4x_2 + 200 = -4x_1 - 8x_2 + 160 \Rightarrow -4x_1 + 4x_2 = -40$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = -40 \\ x_1 + x_2 = -30 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 20, \quad x_2 = 10$$

$$\lambda = -8x_1 - 4x_2 + 200 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$$

$$\det H = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & -4 \\ 1 & -4 & -8 \end{pmatrix} = 8 > 0$$

Damit ist der Gewinn maximal für:

$$x_1^* = 20, \quad x_2^* = 10, \quad \lambda^* = 0.$$

(Bemerkung: Die Tatsache, dass $\lambda^* = 0$ bedeutet, dass die Optimallösung gültig wäre auch ohne die geforderte Nebenbedingung.)

B. Wahlaufgaben

Es ist **genau** eine der nachfolgenden zwei Aufgaben zu wählen. **Streichen** Sie die Aufgabe, die Sie **nicht** gewählt haben, **durch**.

Aufgabe 4	**25 Punkte**

1.

$$x(10) = 980.1986733 \approx 980.20 \,.$$

2.

$$x'(p) = 3p^2 e^{-\frac{p^2}{5000}} - \frac{p^4 e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500} = -\frac{p^2(p^2-7500)e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500}$$

$$\varepsilon_{x,p}(p) = \frac{p \cdot x'(p)}{x(p)} = \frac{-\dfrac{p^3(p^2-7500)e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500}}{p^3 \cdot e^{-\frac{p^2}{5000}}} = \frac{-p^3(p^2-7500)e^{-\frac{p^2}{5000}}}{2500 \cdot p^3 \cdot e^{-\frac{p^2}{5000}}} = \frac{7500-p^2}{2500}.$$

a) $\varepsilon_{x,p}(70) = 1.04\%$

b)

$$x(70) = 128731.7069$$

$$x(70.7) = 130045.3765$$

$$\frac{x(70.7)}{x(70)} \cdot 100 - 100 = \frac{130045.3765}{128731.7069} \cdot 100 - 100 = 1.021025645\%$$

Aufgabe 5	**25 Punkte**

1.

$$K'(x) = 0.03x^2 - x + 10$$

Die quadratische Gleichung

$$0.03x^2 - x + 10 = 0$$

hat wegen $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 0.03 \cdot 10 = -0.2 < 0$ keine reellen Lösungen. Sie muss also entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallen sein.
Nun gilt aber

$$K(0) = 200 < 209.96 = K(1).$$

Daher ist die Kostenfunktion streng monoton wachsend.

$$K''(x) = 0.06x - 1$$

$$K''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; 0.06x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{50}{3}.$$

Damit ist die Kostenfunktion streng konkav für $x < \frac{50}{3}$ und konkav für $x > \frac{50}{3}$.

Zusammenfassend: Die Kosten wachsen degressiv für $x < \frac{50}{3}$ und progressiv für $x > \frac{50}{3}$.

2.- 3.

$$U(x) = -x^2 + 60x$$

$$G(x) = -x^2 + 60x - (0.01x^3 - 0.5x^2 + 10x + 200)$$

$$G(x) - 0.01x^3 - 0.5x^2 + 50x - 200$$

$$G'x) = -0.03x^2 - x + 50$$

$$(-0.03x^2 - x + 50 \;\wedge\; x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad x = 27.42918851774318 \approx 27.43$$

$$G''(x) = -0.06x - 1 < 0, \quad \forall x \geq 0$$

Damit ist der Gewinn maximal für eine nachgefragte Menge von 27.43 Mengeneinheiten und beträgt 588.91 GE.
Dies wird erzielt für einen Preis von

$$p(27.43) = 32.57\,\text{GE}.$$

Der Umsatz ist gleich $U(x) = 893.40\,$GE. Dabei entstehen Kosten von 304.48 GE.