Dr. sc. Siassi
Technische Hochschule Wildau
Juli 2014

Klausur
M a t h e 2
B2/13

Aufgabe 1	**20 Punkte**

Sei

$$M_{RZ} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad M_{RP} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix}$$

1.

$$M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

$$M_{RZ}^{-1} \cdot | \, M_{RP} = M_{RZ} \cdot M_{ZP} \quad \Rightarrow \quad M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RP} = M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RZ} \cdot M_{ZP}$$

$$M_{ZP} = M_{RZ}^{-1} \cdot M_{RP}$$

$$M_{RZ}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad M_{ZP} = = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

	P_1	P_2
Z_1	4	3
Z_2	6	2

2.
Sei

$r := \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \end{pmatrix}^T$: Rohstoffbedarfsvektor,

$p := \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}^T$: Produktionsvektor.

Dann gilt:

$$r = M_{RP} = \begin{pmatrix} 14 & 8 \\ 46 & 22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3700 \\ 11300 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2	**40 Punkte**

Sei

x_1 : Ackerfläche für Kartoffeln

x_2 : Ackerfläche für Gerste

x_3 : Ackerfläche für Raps

1.

$$
\begin{aligned}
& z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow Max! \\
& x_1 \;\; + x_2 \;\; + x_3 \le 100 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 150 \\
& x_1 + 3x_3 + 4x_3 \le 160 \\
& \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

2.

Die Normalform:

$$
\begin{aligned}
& z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow Max! \\
& x_1 \;\; + x_2 \;\; + x_3 + x_4 \qquad\qquad = 100 \\
& x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad = 150 \\
& x_1 + 3x_3 + 4x_3 \qquad\qquad + x_6 = 160 \\
& \qquad x_i \ge 0,\; i = 1, 2, ..., 6.
\end{aligned}
$$

Simplextableau

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_0
x_4	1	1	1	1	0	0	100
x_5	1	2	3	0	1	0	150
x_6	1	3	**4**	0	0	1	160
z	-2	-2	**-3**	0	0	0	0
x_4	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	60
x_5	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	30
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	40
z	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{3}{4}$	120
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	80
x_5	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	10
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	20
z	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	220

$$x^* = \begin{pmatrix}80 & 0 & 20 & 0 & 10 & 0\end{pmatrix}^T, \qquad z^* = 220 \text{ T€ €}$$

3.

$x_5 = 10$ T€

4.

$\lambda_1 = \frac{5}{3}$ T€

Aufgabe 3	**40 Punkte**

1.

$$U(p_1,p_2) = (50 - p_1 - 0.5p_2)p_1 + (60 - 0.1p_1 - 1.5p_2)p_2$$

$$K(p_1,p_2) = 60 + 0.5(50 - p_1 - 0.5p_2) + 60 + 0.5(60 - 0.1p_1 - 1.5p_2)$$

$$\begin{aligned} G(p_1,p_2 &= U(p_1,p_2) - K(p_1,p_2)\,, \\ &= -p_1^2 - 1.5p_2^2 - 0.6p_1p_2 + 50.55p_1 + 61p_2 - 175 \end{aligned}$$

2. – 3.

$$G_{p_1}(p_1,p_2) = -2p_1 - 0.6p_2 + 50.55$$
$$G_{p_2}(p_1,p_2) = -0.6p_1 - 3p_2 + 61$$

$$\begin{cases} 2p_1 + 0.6p_2 = 50.55 \\ 0.6p_1 \quad + 3p_2 = 61 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad p_1 \approx 20.40, \quad p_2 = 16.25$$

$$\left\langle \det H = \det\begin{pmatrix} -2 & -0.6 \\ -0.6 & -3 \end{pmatrix} = 5.64 > 0 \ \wedge \ G_{p_1p_1} = -2 < 0 \right\rangle$$

$$\Leftrightarrow$$

D.h. für $p_1 = 20.40$ und $p_2 = 16.25$ wird ein maximaler Gewinn von 811.93 GE erzielt

4.

$$x_1(p_1 = 20.40, p_2 = 16.25) \approx 21.47$$

$$x_2(p_1 = 20.40, p_2 = 16.25) \approx 33.57$$

Aufgabe 4	**40 Punkte**

1.
Es handelt sich um die Elastizität der Nutzenfunktion bezüglich x_2, weil

$$\varepsilon_{N,x_2} = \frac{x_2}{N(x_1,x_2)} \cdot N_{x_2} = \frac{x_2 \cdot 4 \cdot x_1^{0.2} 0.8 x_2^{-02}}{4x_1^{0.2} \cdot x_2^{0.8}} = 0.8\%\,.$$

Diese Zahl besagt: Für jedes x_1 und jedes x_2, wenn sich x_2 um 1% erhöht, so erhöht sich der Nutzen etwa um 0.8%.

2. – 3.

$$N(x_1, x_2) = 4x_1^{0.2} \cdot x_2^{0.8} \to Max!$$
$$8x_1 + 5x_2 = 25$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1^{0.2} \cdot x_2^{0.8} - \lambda(8x_1 + 5x_2 - 25) \to Max!$$

$$L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) = 0.8x_1^{-0.8} \cdot x_2^{0.8} - 8\lambda$$
$$L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) = 3.2x_1^{0.2} \cdot x_2^{-0.2} - 5\lambda$$
$$L_\lambda(x_1, x_2) = -(8x_1 + 5x_2 - 25)$$

$$\begin{cases} 0.8x_1^{-0.8} \cdot x_2^{0.8} - 8\lambda = 0 \\ 3.2x_1^{0.2} \cdot x_2^{-0.2} - 5\lambda = 0 \\ 8x_1 + 5x_2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{0.8x_1^{-0.8} \cdot x_2^{0.8}}{3.2x_1^{0.2} \cdot x_2^{-0.2}} = \frac{8\lambda}{5\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1^{-0.8} \cdot x_2^{0.8}}{4x_1^{0.2} \cdot x_2^{-0.2}} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_2}{4x_1} = \frac{8}{5} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{32}{5}x_1$$

$$8x_1 + 5x_2 - 25 = 0 \;\Rightarrow\; 8x_1 + 5 \cdot \frac{32}{5} = 25 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{5}{8} = 0.625 \;\Rightarrow\; x_2 = 4$$

$$\lambda = 0.4415134916675887 \approx 0.4415$$

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & -0.64x_1^{-1.8}x_2^{0.8} & 0.64x_1^{-0.8}x_2^{-0.2} \\ 5 & 0.64x_1^{-0.8}x_2^{-0.2} & -0.64x_1^{0.2}x_2^{-1.2} \end{pmatrix},$$

$$\bar{H}(x_1 = 0.625, x_2 = 0.4) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 8 & -4.5211 & 0.7064 \\ 5 & 0.7064 & -0.1104 \end{pmatrix},$$

$$\det \bar{H}(x_1 = 0.625, x_2 = 4) = 176.605 > 0.$$

Damit hat der Verbraucher den maximalen Nuten von

$$N(x_1 = 0.625, x_2 = 4) = 11.0378,$$

wenn er 0.625 Einheiten von P_1 und 4 Einheiten von P_2 kauft.

4.
Erhöht sich das Budget von 25 Einheiten um eine Einheit, so erhöht sich der maximale Nutzen um etwa 0.4415 Einheiten.