Zur reziproken Optimierung des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells

Gegenstand des Beitrages ist die Anwendung der Theorie der reziproken Optimierung auf einen Spezialfall des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsproblems mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen.
Das Reprozitätstheorem wird entsprechend formuliert und bewiesen. Es wird ferner begründet, warum die Arbeitskräfte als „knappe" Ressource modelliert werden können.
Der Beitrag enthält einen Vorschlag zur systematisch-rationellen Gestaltung eines von Dadajan [3] vorgeschlagenen „Iterationsprozesses" zum Auffinden der optimalen Lösungen mittels der reziproken Aufgaben.
Es wird schließlich gezeigt, wie sich unter zusätzlichen Voraussetzungen die Lösung der reziproken Aufgabe auf die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems reduziert.

Definition 1:
Die Probleme

$$\max\left\{z_A = c^T\left(x - A(x)\cdot x\right) \mid x \in X(Q)\right\} \qquad \text{(A)}$$

und

$$\min\left\{z_B = q\left(x\right) \mid x \in X(C)\right\} \qquad \text{(B)}$$

mit

$$X(Q) := \bar{X} \cap \left\{x \in R_+^n \mid q(x) \le Q\right\}$$

$$X(C) := \bar{X} \cap \left\{x \in R_+^n \mid c^T\left(x - a(x)\cdot x\right) \ge C\right\}$$

$$\bar{X} := \left\{x \in R_+^n \mid x - A(x)x \ge y,\ y \in R_+^n\right\}$$

heißen zueinander *reziprok.*

Hier sind:

$c := (c_i) \in R^n;\quad c_i \ge 0$ für mindestenstens ein $i = 1,\ 2, \ldots, n$,

$x := (x_i) \in R_+^n$

x_i : die Gesamtproduktion des Zweiges $i = 1,\ 2, \ldots, n$,

$A(x) := (a_{ij}(x_j))$

$a_{ij}(x_j)$: der spezifische Materialaufwand des Zweiges i, $(i = 1,\ 2, \ldots, n)$ zur Herstellung der Produktion x_j $(j = 1,\ 2, \ldots, n)$ des Zweiges j ,

$y := (y_i) \in R_+^n$

y_i : die Endproduktion des Zweiges $i = 1,\ 2, \ldots, n$,

C : eine untere Schranke der Funktion Z_A,

$q(x)$: die zur Realisierung des Gesamtproduktionsvektors x benötigte Primärressource,

$q > 0$: die verfügbare Menge an Primärressource.

Dabei wird vorausgesetzt, dass die vorhandene Primärressource „knapp“ ist (vgl. Definition2).
Alle Produktionsgrößen (Gesamtproduktion, Endproduktion usw.) sind Werteinheiten gemessen.

Definition 2:
„Eine Primärressource wird als *knapp* charakterisiert, wenn eine Veränderung ihrer Menge eine Änderung des optimalen Wertes der Zielfunktion bewirkt“ [4].

Bemerkung 1:
Der Begriff „Knappheit der Ressource“ ist auch schärfer als der Begriff „vollständige Ausnutzung“, da letztere nicht bedeutet, dass eine Ressourcenveränderung unbedingt die optimale Lösung verändert.

Bemerkung 2:
In (A) wird ein spezielles statisches volkswirtschaftliches Verflechtungsproblem mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen [9] optimiert, wobei die Materialaufwandsfunktion jedes Zweiges nur abhängig von dessen Gesamtproduktion vorausgesetzt wird.
Maximiert wird die nach den einzelnen Zweigen gewogene Endproduktion der Volkswirtschaft unter der Bedingung, dass

1) jeder Zweig eine vorgegebene Endproduktion sichert;
2) die verfügbare Menge der einzig vorhandenen Ressource knapp ist.

(Wenn in (A) alle Gewichte c_i, $i = 1,2 ,...,n$, gleich Eins gewählt werden, so handelt es sich um die Maximierung des Nationaleinkommens).

In (B9 wird die zur Realisierung des Gesamtproduktionsvektors x benötigte Primärressource minimiert und zwar unter der Bedingung, dass

1) jeder Zweig eine vorgegebene Endproduktion sichert;
2) für die nach den einzelnen Zweigen gewogene Endproduktion der Volkswirtschaft ein bestimmtes Mindestniveau angegeben wird.

Bemerkung 3:
Es ist zweckmäßig, in (A) und (B) die Arbeitskraft als „knappe“ Ressource zu wählen. Dafür können folgende Argumente angeführt werden [10]:

(1) Die Arbeitskräftezahl ist ständig absolut begrenzt.
(2) Die Arbeitskräftezahl entwickelt sich <u>relativ</u> unabhängig vom technisch-technologischen Niveau der Produktion.
(3) Die Arbeitskräfte sind am universellsten im Produktionssystem, auch in anderen Sphären einsetzbar.

(4) Jede Einsparung an lebendiger Arbeit (an Arbeitszeit) führt letztlich zu mehr Freizeit und damit zur Erhöhung des „Wohlstandes“.

<u>Satz 1</u> (Das Reziprozitätstheorem)
Gegeben seien die Reziprokenaufgaben (A) und (B) und die Mengen

$$X^*(Q) := \left\{ x_A^* \mid z_A\left(x_A^*\right) = \max_{x \in X(Q)} z_A(x) \right\}$$

und

$$X^*(C) := \left\{ x_B^* \mid z_B\left(x_B^*\right) = \max_{x \in X(C)} z_B(x) \right\}.$$

Es gelte

$$q\left(x_A^*\right) = Q, \quad \forall x_A^* \in X^*(Q)$$

und

$$c = z_A\left(x_A^*\right) = c^*.$$

Dann gilt

$$X^*(Q) := X^*(C).$$

Beweis:
Es sei vorbereitend bemerkt, dass

$$X_A^* \in X^*(Q) \quad \Rightarrow \quad X_A^* \in \bar{X},$$
$$X_B^* \in X^*(C) \quad \Rightarrow \quad X_B^* \in \bar{X}.$$

Jede Lösung $X_A^* \in X^*(Q)$ gehört der Menge $X^*(C)$ an. In der Tat, es ist $X_A^* \in \bar{X}$ und $z_A\left(X_A^*\right) = c^*$; daraus folgt $X_A^* \in X\left(C^*\right)$. Wegen des Minimierungscharakters der Lösungen x_B^* erhält man $q\left(x_B^*\right) \le q\left(x_A^*\right)$. Aus der letzten Ungleichung folgt, dass alle Lösungen $x_B^* \in X^*\left(C^*\right)$ ebenfalls der Menge $X(Q)$ angehören, denn es ist $q\left(x_B^*\right) \le q\left(x_A^*\right) = Q$ und $X_B^* \in \bar{X}$. Wegen des Maximierungscharakters der Lösungen x_A^* gilt $z_A\left(x_B^*\right) \le z_A\left(x_A^*\right) = C^*$. Aus der ergebenden Ungleichung $z_A\left(x_B^*\right) \le C^*$ und der gegebenen Bedingung $z_A\left(x_B^*\right) \ge C^*$ der Aufgabe (B) folgt: $z_A\left(x_B^*\right) = z_A\left(x_A^*\right) = C^*$, womit gezeigt ist, dass die Beschränkung $z_A\left(x_B^*\right) \ge C^*$ in der Aufgabe (B) als Gleichung erfüllt ist. Letzteres bedeutet, dass jede Lösung x_B^* der Menge $X^*(Q)$ angehört bzw., dass $X^*\left(C^*\right) \subset X*\left(Q^*\right)$ gilt. Hieraus folgt $q\left(x_B^*\right) = Q$ für alle $X_B^* \in X^*\left(C^*\right)$, d.h.

$$\min_{x \in X(C^*)} q(x) = Q \ .$$

Da jede Lösung $x_A^* \in X^*(Q)$ der Menge $X(C^*)$ angehört und $q(x^*) = \min_{x \in X(C^*)} q(x) = Q$ gilt, folgt $x_A^* \in X^*(C^*)$. Somit gilt $X^*(Q) \subset X^*(C^*)$, d.h. $X^*(Q) = X^*(C^*) = X^*(C)$.

q.e.d.

<u>Bemerkung 4</u>:
Das Reziprozitätstheorem wurde für einen Spezialfall erstmals von A. K. Lurje [5] und allgemein von A. G. Aganbegjan und Bagrinovskij [1] bewiesen. In unserem Fall erfolgte der Beweis in Bezug auf die oben formulierten Aufgaben (A) und (B).

<u>Bemerkung 5</u>:
Im Folgenden wird das Reziprozitätstheorem für den linearen Fall an einem Beispiel für zwei Zweige veranschaulicht und graphisch illustriert.
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0.20 & 0.40 \\ 0.55 & 0.10 \end{pmatrix}, \qquad y := \begin{pmatrix} 240 & 85 \end{pmatrix}^T,$$

$$q(x) := 0.2x_1 + 0.4x_2, \qquad Q := 400, \qquad c := \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T .$$

Dann gilt:

$$z_A = 0.25x_1 + 0.5x_2 \underset{x \in X(Q)}{\rightarrow} \max!$$

$$z_B = 0.20x_1 + 0.40x_2 \underset{x \in X(C)}{\rightarrow} \min!$$

$$\bar{X} = \left\{x \in R_+^2 \mid 0.8x_1 - 0.4x_2 \ge 240, \quad -0.55x_1 + 0.9x_2 \ge 85\right\} ,$$
$$X(Q) = \left\{x \in R_+^2 \mid 0.8x_1 - 0.4x_2 \ge 240, \ -0.55x_1 + 0.9x_2 \ge 85, \ 0.2x_1 + 0.4x_2 \le 400\right\}$$
$$X(C) = \left\{x \in R_+^2 \mid 0.8x_1 - 0.4x_2 \ge 240, \ -0.55x_1 + 0.9x_2 \ge 85, \ 0.25x_1 + 0.5x_2 \ge 500\right\}$$

$$z_A^* = 500 = c^*$$
$$X^*(Q) = X^*(C) = \left\{x^* \mid x^* = \alpha \cdot x_1^* + (1-\alpha) \cdot x_2^*, \ \alpha \in [0, 1]\right\}$$
$$x_1^* := \begin{pmatrix} 815.0 & 592.5 \end{pmatrix}^T, \qquad x_2^* := \begin{pmatrix} 640.0 & 680.0 \end{pmatrix}^T .$$

<u>Bemerkung 6</u>:
Durch Satz 1 ist die *prinzipielle* Möglichkeit gegeben, durch die Lösung einer der beiden reziproken Aufgaben (A) und (B) eine optimale Lösung für beide Aufgaben zu gewinnen (falls eine solche existiert) und dabei eventuell numerische Vorteile zu erzielen. Damit liegt eine gewisse Analogie zur Dualität vor. Es sei jedoch bemerkt, dass die praktische Überprüfung der im Reziprozitätstheorem erforderlichen Bedingungen *im Allgemeinen* mit großen Problemen verbunden sein dürfte. Es wird vor allem recht schwierig sein, eine

genauere untere Schranke für die Funktion z_A vorzugeben. Ferner muss nachgewiesen werden, dass die Ressourcenrestriktion für *alle* Optimallösungen als Gleichung erfüllt sein wird, was in der Regel schwer durchführbar ist.

Bemerkung 7:
Angesichts der in Bemerkung 6 angedeuteten Probleme wird in [3] auf einen „Iterationsprozess" zum Auffinden der optimalen Lösung mittels der reziproken Aufgaben verwiesen. Hier soll nur kurz der Grundgedanke wiedergegeben werden:
Angenommen, es werden die reziproken Aufgaben (A) und (B) der volkswirtschaftlichen Optimierung formuliert. Für Aufgabe (B) könnte ein Zielfunktionswert c vorgegeben werden, der aber mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht genau dem Wert C^* entspricht. Nun wird die Aufgabe (B) gelöst. Die ermittelte Lösung gibt gleichzeitig den für das gegebene C minimalen Aufwand der knappen Ressource (Arbeitskräfte) an. Liegt dieser Aufwand über dem aus Aufgabe (A) bekannten verfügbaren Vorrat Q, wurde das mindestens zu erreichende Niveau C zu hoch angesetzt. Die Berechnung ist mit einem geringeren Wert C zu wiederholen.
Liegt der notwendige Ressourcenaufwand unter dem Vorrat Q, kann für die erneute Berechnung der Aufgabe (B) ein höherer Wert C angesetzt werden. Das geschieht so lange, bis für ein gewähltes Niveau C^* in Aufgabe (B) eine Lösung x_B^* gefunden wurde, die einen Zielfunktionswert Q ergibt, der dann genau dem Wert der betrachteten knappen Ressource entspricht. Die Ressourcenrestriktion in Aufgabe (A) ist damit als Gleichung erfüllt. Die Lösungen von (A) und (B) stimmen nun laut Reziprozitätstheorem überein.

Bemerkung 8:
Der in Bemerkung 7 beschriebene „Iterationsprozess" lässt sich unter Umständen systematischer und damit rationeller gestalten, indem $C \in [0, \bar{C}]$ als Parameter gewählt wird.. Dann wird ein parameterabhängiges, i.a. nichtlineares Optimierungsproblem zu lösen sein, dass natürlich mit numerischen Problemen verbunden sein kann ([2], [6], [7]).

Bemerkung 9:
Der nachfolgende Satz reduziert bei Vorhandensein zusätzlicher Voraussetzungen die Lösung der reziproken Aufgabe (A) und (B) auf die Ermittlung der eindeutigen Lösung eines i. a. nichtlinearen Gleichungssystems des Verflechtungstyps.

Satz 2:
Gegeben sei folgender Spezialfall eines statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungs-problems mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j)x_j + y_i \ , \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{C}$$

bzw. in Matrizenschreibweise

$$x = A(x)x + y. \tag{C‘}$$

Es mögen folgende *Voraussetzungen* gelten:

V1(1): Die Funktion $(E - A(x))x =: f(x)$ ist für alle $x \in R_+^n$ stetig;

V1(2): Das Problem (C‘) ist eindeutig global lösbar (d.h.: für jedes beliebige, nach Wahl aber fixierte $y \in R_+^n$ existiert ein $x \in R_+^n$ derart, dass (C‘) erfüllt ist;

V1(3): Sei $x := (E - A(x))^{-1} y$ die Lösung von (C‘). Dann sind die Elemente der Matrix $(E - A(x))^{-1}$ stetig für alle $x \in R_+^n$;

V1(4): $(x^1 - A(x^1))x^1 \geq x^2 - A(x^2)x^2, \quad \forall x^1, x^2 \in R_+^n \Rightarrow x^1 \geq x^2$;

V2: Die Funktionen $((E - A(x))x)_i =: f_i(x),\ i = 1, 2, ..., n,$ sind für alle $x \in R_+^n$ konvex;

V3(1): $\left.\begin{array}{ll} i) & q(x) \geq 0 \\ ii) & g(x) \text{ ist stetig} \end{array}\right\} \forall x \in R_+^n;$

V3(2): $\langle x^1 \geq x^2; x^1 \neq x^2 \rangle \ \Rightarrow\ q(x^1) > q(x^2)$;

V3(3): $q(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geq \alpha q(x^1) + (1-\alpha)q(x^2),\ \forall \alpha \in \,]0,\ 1[,\ \forall x^1, x^2 \in R_+^n$;

V3(4): $\forall k_1 = const. > 0\ \exists k_2 = const. > 0:\ q(\bar{x}) \geq k_1$ für $\forall(\bar{x} \in R_+^n \wedge \| \bar{x} \| \geq k_2)$.

Ferner seien die in Definition 1definierten reziproken Aufgaben (A) und (B) gegeben.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle g((E - A(x))^{-1} y = Q \rangle \ \Rightarrow\ X(Q) &= X(C) \\ &= \{(E - A(x))^{-1} y\} \\ &= X^*(Q) = X^*(C). \end{aligned}$$

Beweis:
Der Beweis folgt aus den Sätzen 1 – 4 in [8].

Bemerkung 10:
Satz 2 bedeutet:
Wenn unter anderem vorausgesetzt wird, dass

(1) die Endproduktionen aller Zweige bezüglich der Gesamtproduktion stetig, monoton wachsend und konvex sind;

(2) das der Optimierungsaufgabe (B) zugrunde liegende statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen (C‘) eindeutig global lösbar und die Elemente der entsprechenden Inversen bezüglich der Gesamtproduktion stetige Funktionen sind;

(3) die Primärressourcenfunktion nur nichtnegative Werte annimmt und streng monoton wachsen und konvex ist;

dann gilt:

Wenn bei der Realisierung der Lösungen von (C‘) die Primärressourcenmenge voll ausgeschöpft wird, dann haben die Optimierungsprobleme (A) und (B) genau eine zulässige Lösung, die gleichzeitig die Optimallösungen dieser Probleme darstellt.

Bemerkung 11:
Weitere interessante Aspekte aus der Betrachtung reziproker Optimierungsaufgaben ergeben sich aus der Untersuchung der zugehörigen dualen Probleme. Darauf wird in einem späteren Beitrag eingegangen.

Literaturverzeichnis

[1] Aganbegjan, A. G.; Bagrinovskij, K. A.; Granberg, A. G.:
Modellsysteme der volkswirtschaftlichen Planung
Moskau 1972 (russ.)

[2] Bank, B.; Guddat, J.; Klatte, D.; Kummer, B.; Tammer, K.:
Nonlinear Parametric Optimisation
Berlin 1982

[3] Dadajan, V. S.:
Ökonomische Gesetze des Sozialismus und optimale Entscheidungen:
Moskau 1970

[4] Granberg, A. G.:
Modelleirung der sozialistischen Wirtschaft:
Berlin 1981

[5] Lurje, A. L.:
Ein abstraktes Modell des optimalen Wirtschaftsprozesses und die objektiv bedingten Bewertungen:
In: Ekonomika i matematičeskie metody
Moskau 2 (1966)1 (russ.)

[6] Siassi, J.:
Eine parametrische Formulierung des Verfahrens von Hildreth und d’Esopo
In: Ekonomicko-matematický obzor, 8(1972), S. 277 – 283

[7] Siassi, J.:
Ein Verfahren zur Lösung parametrischer quadratischer Optimierungsprobleme
In: Vortragsreihe „Mathematische Optimierungstheorie“, XVIII. Internat. Wiss. Koll. TH Ilmenau, 1973, S. 103 – 104.

[8] Siassi, J.:
Die Optimierung statischer volkswirtschaftlicher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen
Fo-Inf. D. Sektion Wirtschaftsinformatik, Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner“, Berlin, Heft 3/86(11)

[9] Siassi, J.:
Möglichkeiten und Probleme der Anwendung statischer volkswirtschaftlicher Modelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen.
Diss. B, Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner", Berlin 1987

[10] Stark, K.:
Über reziproke Aufgaben in der volkswirtschaftlichen Modellierung
Internes Material des WB Operationsforschung der Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner" Berlin, 1982.