

Ein kurzer Überblick über die Theorie der statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandfunktionen

Gegenstand unserer Untersuchung ist das statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodell mit nichtlinearen Materialaufwandfunktionen:

$$(1) \quad x_i = b_i(x) + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

bzw.

$$(2) \quad x = b(x) + y.$$

Hier sind:

x_i : die Gesamtproduktion des Zweiges i , $i = 1, 2, \dots, n$

$(x_i) =: x \in R_+^n$,

y_i : die Endverwendung des Zweiges i , $i = 1, 2, \dots, n$

$(y_i) =: y \in R_+^n$,

$b_i(x)$: die Materialaufwandfunktion des Zweiges i , $i = 1, 2, \dots, n$

$(b_i(x)) =: (b(x)) \in R_+^n$.

Es ist aus ökonomischer Sicht nützlich, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen im Problem (2) eine geforderte Endverwendung realisierbar ist. Es wäre natürlich auch vorteilhafter, wenn die geforderte Endverwendung auf verschiedenen Wegen realisiert werden könnte, was beim „klassischen Leontief-Modell“ nicht möglich ist und zwangsläufig als Nachteil dieses Modells sein kann. Diese und ähnliche Fragen machen es notwendig, Lösbarkeitsbegriffe einzuführen und (mathematische) Existenz-, Ein- und Mehrdeutigkeitsaussagen herzuleiten.

Wir wollen daher zunächst feststellen, was wir unter der *Lösbarkeit* des Modells (2) verstehen:

Definition 1:

Das Problem (2) heißt *global* (bzw. *stark*) *lösbar*, wenn für jedes beliebige, nach Wahl aber fixierte $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (2) erfüllt ist.

Definition 2:

Das Problem (2) heißt *lokal* (bzw. *schwach*) *lösbar*, wenn für ein $y \in R_+^n$ ein $x \in R_+^n$ existiert, derart dass (2) erfüllt ist.

Mit dieser Begriffsbildung werden einige bekannte Äquivalenzaussagen des statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit homogen-linearen Materialaufwandfunktionen (vgl. hierzu z. B. [17]) verallgemeinert.

Die eingeführten Lösbarkeitsbegriffe (globale und lokale Lösbarkeit) sind offensichtlich im Falle des „klassischen Leontief-Modells“, identisch.

Obwohl in diesem Beitrag keine Verfahren zur numerischen Lösung von statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Materialaufwandfunktionen behandelt werden (vgl. hierzu z.B. [24]), soll hier lediglich ein Verfahren erwähnt werden. Es handelt sich um eine Variante der sukzessiven Approximation (VSA), das selbst eine Verallgemeinerung des Verfahrens von Gauß-Seidel zur Lösung linearer Gleichungssysteme darstellt. Die einzelnen Varianten unterscheiden sich in der Wahl der Anfangslösung.

Bei der Variante, die hier zur Diskussion steht (VSA-1), wird ausgehend vom Endverwendungsvektor als Anfangslösung die erforderliche Gesamtproduktion iterativ mit beliebiger Genauigkeit nach folgender Vorschrift ermittelt:

$$\text{i) } x^{(0)} := y$$

(VSA-1)

$$\text{ii) } x^{(k)} = b(x^{(k-1)}) + y, \quad k \in N.$$

Die Diskussion des Verfahrens (VSA-1) erfolgt in diesem Beitrag primär aus der Sicht der Lösbarkeit des Problems (2) und nur sekundär hinsichtlich seiner numerischen Eigenschaften.

Es stellt sich nämlich heraus (vgl. Satz 1), dass das Verfahren (VSA-1) – unter Berücksichtigung gewisser schwacher Bedingungen – genau dann konvergiert, wenn das Problem (2) im Sinne der Definition 1 lösbar ist.

Eine dieser Bedingungen, nämlich die nachfolgende

$$\text{(B. 7.)} \quad b(x^2) \geq b(x^1), \quad \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0,$$

fordert, dass die Materialaufwandfunktion $b(x)$ *isoton* ist.

(Für weitere Bedingungen siehe den Anhang!)

Die Isotoniebedingung (B. 7.) garantiert, dass eine nach (VSA-1) konstruierte Folge monoton wächst. (vgl. [29]). Sie bedeutet ökonomisch, dass mit nichtfallender Gesamtproduktion keine der erforderlichen Aufwendungen absolut abnimmt. Sind in (2) die Materialaufwandfunktionen isoton und stetig, dann lässt sich folgende Äquivalenzaussage beweisen:

Das Verfahren (VSA-1) ist genau dann konvergent, wenn das Problem (2) global lösbar ist. Dabei konvergiert die nach (VSA-1) konstruierte Folge gegen eine Lösung dieses Problems.

Die obige Aussage wurde zuerst von Lahiri [12] für einen Spezialfall bewiesen. Wir nehmen im folgenden Satz eine Verallgemeinerung seiner Ergebnisse vor:

Satz 1:

Gegeben sei das Problem (2) mit (B. 7.). Es gelte ferner die Bedingung

$$(B8) \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} b(x^{(k)}) = b\left(\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)}\right).$$

Dann gilt:

$$\left\langle \{x^{(k)}\} \quad k \in N_0 : (\text{VSA -1}) \text{ konvergiert } t \right\rangle$$

\Leftrightarrow

$$\left\langle (2) \text{ ist global lösbar und } x^* := \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} \text{ ist eine Lösung von (2)} \right\rangle$$

Beweis:

(\Rightarrow)

Sei $x^* := \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (3) \quad x^{(k+1)} - x^{(k)} &= b(x^{(k)}) + y - x^{(k)} \\ &= b(x^{(k)}) + y - x^{(k)} + b(x^{(k)}) - b(x^{(k)}) \\ &= y - f(x^{(k)}) \end{aligned}$$

mit $x^{(k)} - b(x^{(k)}) := f(x^{(k)})$.

Da die Folge $\{x^{(k)}\} \quad k \in N_0$ konvergiert, folgt:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (y - f(x^{(k)})) && (\because (3)) \\ &= y - \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x^{(k)}) \\ &= y - \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{(k)} - b(x^{(k)})) \\ &= y - (x^* - \lim_{k \rightarrow +\infty} b(x^{(k)})) \\ &= y - (x^* - b(\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)})) && (\because (B. 8.)) \end{aligned}$$

$$= y - (x^* - b(x^*))$$

$$= y - f(x^*).$$

(\Leftarrow)

Sei x^* eine Lösung von (2):

$$(4) \quad x^* = b(y) + y.$$

Dann gilt:

$$(5) \quad x^* \geq y$$

und

$$x^{(1)} = b(y) + y \quad (\because \text{(VSA -1)})$$

$$\leq b(x^*) + y \quad (\because (5), \text{(B. 7.)})$$

$$= x^*.$$

Es gelte die Induktionsannahme:

$$(6) \quad x^{(k)} \leq x^*.$$

Dann erhält man:

$$x^{(k+1)} = b(x^{(k)}) + y \quad (\because \text{(VSA -1)})$$

$$\leq b(x^*) + y \quad (\because (6), \text{(B. 7.)})$$

$$(7) \quad = x^* \quad (\because (4))$$

Damit ist die Folge $\{x^{(k)}\}$, $k \in N_0$ beschränkt und monoton (\because (B. 7.)) ; sie ist also konvergent. Der Grenzwert löst nach der Konstruktion das Problem (2).

q. e. d.

Eine fast triviale Folgerung des Satzes 1 besteht darin, dass das Verfahren (VSA-1) die „beste“ Lösung des Problems (2) in dem Sinne liefert, dass die gegebene Endverwendung mit der geringsten Gesamtproduktion realisiert wird.

Die „Minimaleigenschaft“ des Verfahrens (VSA-1) soll zunächst an einem kleinen Beispiel illustriert werden:

Sei

$$a_{ij} := \begin{cases} x_j & \text{für } x_j \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3} & \text{für } x_j > \frac{1}{3}, \end{cases} \quad i, j = 1, 2;$$

$$y := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T.$$

Sowohl $x^1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^T$ als auch $x^2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}^T$ lösen dieses Problem. Eine Anwendung des Verfahrens (VSA-1) würde jedoch stets zur Lösung x^2 .

Der nachfolgende Satz beweist diese Eigenschaft allgemein:

Satz 2:

Gegeben sei das Problem (2). Es gelten die Bedingungen (B. 7.) und (B. 8.). Dann gilt:

$$\langle (2) \text{ hat eine mehrdeutige Lösung für ein festes } y \in R_+^n \rangle$$

\Leftrightarrow

$$\langle \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} := x^* \leq \bar{x} \rangle$$

\bar{x} : eine beliebige Lösung des Problems (2) für dieses feste $y \in R_+^n$.

Beweis:

Es gilt

$$\bar{x} = b(\bar{x}) + y$$

$$(8) \quad \geq y. \quad (\because b(x) \in R_+^n)$$

Wir zeigen nun, dass \bar{x} eine obere Schranke der nach (VSA-1) definierte Folge ist:

Es gilt

$$x^{(1)} = b(x) + y$$

$$\leq b(\bar{x}) + y \quad (\because (8), (B. 7.))$$

$$= \bar{x}.$$

Es gelte die Induktionsannahme:

$$(9) \quad x^{(k)} \leq \bar{x}.$$

Dann gilt:

$$(10) \quad \begin{aligned} x^{(k+1)} &= b(x^{(k)}) + y && (\because (9), (B.7.)) \\ &\leq b(x) + y \\ &= \bar{x}. \end{aligned}$$

Es gilt ferner:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)} \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{x}, \quad (\because (10))$$

d. h.

$$x^* \leq \bar{x}.$$

q. e. d.

Einen anderen Zugang zur Theorie der „Minimaleigenschaft“ eines statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodells mit nichtlinearen Materialaufwandfunktionen findet man in [2].

Hierzu werden einige Ergebnisse der Theorie der M-Funktionen und Z-Funktionen [32] sowie die der indifferenten Optimierung ([33], [34]) verwendet. Während die Aussage des Satzes 2 verfahrensgebunden ist, sind die Ergebnisse von Bód methodeneunabhängig. Andererseits sind die von Bód geforderten Bedingungen weitaus einschränkender als die des Satzes 2.

Das Verfahren der sukzessiven Approximation kann auch mit $x^{(0)} := 0$ (VSA-2) bzw. $x^{(0)} := x^+ \in R_+^n$ (VSA-3) gestartet werden. Für den Nachweis der Konvergenz benötigt man allerdings die zusätzliche Voraussetzung:

$$\exists \text{ ein } x^+ \in R_+^n : f(x^+) \geq y,$$

$$f(x^+) := x^+ - b(x^+).$$

Es muss also eine Gesamtproduktion existieren, die mindestens die geforderte Voraussetzung realisiert.

Während (VSA-2) die Minimaleigenschaft beibehält, besitzt (VSA-3) eine „Maximaleigenschaft“. Es liefert also im Falle der Mehrdeutigkeit einen Lösung des Problems (2), die (komponentenweise) nicht kleiner ist als jede Lösung dieses Problems.

Es lassen sich nun zahlreiche Bedingungen formulieren, unter denen das Problem (2) (ein- oder mehrdeutig) lösbar ist. Diese Bedingungen sind vor allem an die Materialaufwandfunktion $b: R_+^n \rightarrow R_+^n$ zu stellen. (vgl. Anhang 1 für eine Zusammenfassung dieser Bedingungen).

Im Anhang 2 sind die wichtigsten Existenz-, Ein- und Mehrdeutigkeitssaussagen für das Problem (2) zusammengestellt worden.

Hier werden die meisten von ihnen in weitgehend verbaler Form angeführt (vgl. [29] für die entsprechende mathematische Formulierung bzw. Beweisführung):

- (A1): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)).
Wenn das Problem für einen bestimmten Endverwendungsvektor lösbar ist, dann ist es auch für jeden (komponentenweise) kleineren Endverwendungsvektor lösbar.
- (A2): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)) und unter folgender Voraussetzung:
Erhöht man die Gesamtproduktion, so erhöht sich der damit verbundene Materialaufwand höchstens genau so schnell (B. 9.).
Wenn das Problem für einen (streng) positiven Endverwendungsvektor lösbar ist, dann ist es global lösbar.
- (A3): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)) und unter folgender Voraussetzung:
Erhöht man die Gesamtproduktion, so erhöht sich der damit verbundene Materialaufwand höchstens genau so schnell (B. 9.).
Wenn das Problem für einen (streng) positiven Endverwendungsvektor lösbar ist, dann ist diese Lösung eindeutig.
- (A4): Gegeben sei das Problem (2) unter der Kontraktionsbedingung (B. 10.).
(Für einige Normen ist die ökonomische Interpretation von (B. 10.) offensichtlich:
Für die Zeilensummennorm bedeutet (B. 10.), dass für alle Gesamtproduktionswerte der Zuwachs des Materialaufwands geringer ist als der Zuwachs des Gesamtproduktionszuwachses.
Für die Spaltensummennorm fordert (B. 10.), dass für alle Gesamtproduktionswerte der Zuwachs des gesamtgesellschaftlichen Materialaufwands nicht größer ist als der Zuwachs des gesellschaftlichen Gesamtproduktes).
Dann ist das Problem eindeutig lösbar.
- (A5): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)).
Es möge ferner die Bedingung (B. 4.) gelten. Ferner sei der größte Eigenwert der Matrix der kleinsten oberen Schranken der Materialaufwandskoeffizienten kleiner als Eins (B. 11.).
Dann ist das Problem global lösbar.
- (A6): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)) und unter folgender Voraussetzung:
Es möge ferner die Bedingung (B. 4.) gelten. Weiter möge der größte Eigenwert der kleinsten oberen Schranken der Materialaufwandskoeffizienten kleiner als Eins ein. Es sei weiter vorausgesetzt, dass bei nichtabnehmender Gesamtproduktion die Koeffizienten des direkten Materialaufwands nicht abnehmen (B. 12.).
Dann ist das Problem eindeutig global lösbar.

- A(7): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)) und unter folgender Voraussetzung:
 Es möge ferner die Bedingung (B. 4.) gelten. Es sei vorausgesetzt, dass bei nichtabnehmender Gesamtproduktion die Gesamtlieferung der einzelnen Zweige zur Herstellung einer Produktionseinheit sich nicht erhöht und kleiner als eine Einheit ist. (Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der Bauer-Solow-Bedingung [17]).
 Dann ist das Problem eindeutig lösbar.
- A(8): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)) und unter folgender Voraussetzung:
 Es möge ferner die Bedingung (B. 4.) gelten. Es sei ferner folgendes vorausgesetzt: Mit nichtabnehmender Gesamtproduktion erhöht sich die Gesamtlieferung der einzelnen Zweige zur Herstellung einer Produktionseinheit nicht. Sie ist kleiner als eine Einheit für die Gesamtproduktionsvektoren, die einen (streng) positiven Endverwendungsvektor realisieren (B. 14.).
 (Es handelt sich hierbei um eine schwächere Version der Bedingung (B. 13.))
 Dann ist das Problem eindeutig global lösbar.
- A(9): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen und stetigen Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 8.)) und unter folgender Voraussetzung:
 Es möge ferner die Bedingung (B. 4.) gelten. Es sei ferner folgendes vorausgesetzt: Mit nichtabnehmender Gesamtproduktion erhöht sich die Gesamtlieferung der einzelnen Zweige zur Herstellung einer Produktionseinheit nicht. Sie ist kleiner als eine Einheit für die Gesamtproduktionsvektoren, die einen (streng) positiven Endverwendungsvektor realisieren (B. 14.).
 Wenn das Problem für eine (streng) positiven Endverwendungsvektor lösbar ist, dann ist es global lösbar.
- A(10): Gegeben sei das Problem (2) unter der Bedingung (B. 3.). Die Materialaufwandfunktionen mögen stetig differenzierbar sein und deren Ableitungen im Nullpunkt ihren höchsten Wert annehmen (B. 17.). Es möge ferner kein Materialaufwand entstehen, wenn nichts produziert wird.
 Dann ist das Problem eindeutig global lösbar.
- A(11): Gegeben sei das Problem (2) mit isotonen, stetig differenzierbaren und konkaven Materialaufwandfunktionen ((B. 7.), (B. 15.), (B. 18.)). Es möge keine Materialaufwand entstehen, wenn nichts produziert wird (B. 16.). Es gebe ferner eine Gesamtproduktion, die dem entsprechenden Materialaufwand unterproportional ist (B. 19.).
 Dann ist das Problem global lösbar.

Anhang 1

Die an die Materialaufwandsfunktion

$$b : R_+^n \rightarrow R_+^n$$

gestellten Bedingungen

Bedingung	Inhalt
(B. 1.)	$b_i(x) := \sum_{j=1}^n b_{ij}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$ $b_i : R_+^n \rightarrow R_+^1, \quad i = 1, 2, \dots, n$ $b_{ij} : R_+^1 \rightarrow R_+^1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$
(B. 2.)	$b_i(x) := \sum_{j=1}^n b_{ij}(x_i, x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n$
(B. 3.)	$b_i(x) := \sum_{j=1}^n b_{ij}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$ $b_{ij} : R_+^1 \rightarrow R_+^1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$
(B. 4.)	$b_{ij} := a_{ij}(x) \cdot x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$ $a_{ij} := \begin{cases} \frac{b_{ij}(x_1, \dots, x_n)}{x_j} & \text{falls } x_j > 0 \\ \lim_{\bar{x}_j \rightarrow x_j} \frac{b_{ij}(x_1, \dots, x_{j-1}, \bar{x}_j, x_{j+1}, \dots, x_n)}{\bar{x}_j} & \text{falls } x_j = 0 \end{cases}$
(B. 5.)	$b_{ij} := a_{ij} \cdot x_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$
(B. 6.)	$b_{ij} := a_{ij} \cdot x_j + a_{ij}^*, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$
(B. 7.)	$b(x^2) \geq b(x^1), \quad \forall x^2, x^1 \in R_+^n : x^2 \geq x^1 \geq 0$
(B. 8.)	$\lim_{k \rightarrow +\infty} b(x^{(k)}) = b(\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{(k)})$
(B. 9.)	$b(\lambda x) \leq \lambda b(x), \quad \forall \lambda > 1; \forall x \in R_+^n$
(B. 10.)	$\exists \text{ ein } \lambda \in [0, 1[: \ b(x^2) - b(x^1)\ \leq \lambda \cdot \ x^2 - x^1\ , \quad \forall x^1, x^2 \in R_+^n$
(B. 11.)	$\lambda(\bar{A}) < 1, \quad \lambda(\bar{A}) : \text{größter Eigenwert von } \bar{A},$ $\bar{A} := (\bar{a}_{ij}) \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$ $a_{ij} := \sup_{x \in R_+^n} a_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$
(B. 12.)	$A(x^2) \leq A(x^1), \quad \forall x_2 \geq x_1 \geq 0$
(B. 13.)	$1^T \cdot A(x^2) \leq 1^T \cdot A(x^1), \quad \forall x_2 \geq x_1 \geq 0,$
(B. 14.)	$1^T \cdot A(x^2) \leq 1^T \cdot A(x^1), \quad \forall x_2 \geq x_1 \geq 0,$ $1^T \cdot A(x) < 1^T, \quad \forall x : x > A(x) \cdot x$
(B. 15.)	$b(x) \text{ ist für alle } x \in R_+^n \text{ stetig differenzierbar}$

Anhang 1

Die an die Materialaufwandfunktion

$$b : R_+^n \rightarrow R_+^n$$

gestellten Bedingungen

(Fortsetzung)

Bedingung	Inhalt
(B. 16.)	$b(0) = 0$
(B. 17.)	$\frac{db}{dx}(0) \geq \frac{db}{dx}(x) \geq 0, \quad \forall x \in R_+^n$
(B. 18.)	$b(x)$ ist für alle $x \in R_+^n$ konkav.
(B. 19.)	\exists (ein $x^0 > 0 \wedge$ ein $\lambda \in [0, [$): $b(x^0) \leq \lambda x^0$
(B. 20.)	$b'(x)$ ist für kein $x > 0$ zerlegbar.

Anhang 2

Eine Zusammenfassung der wichtigsten Existenz-
Ein- und Mehrdeutigkeitsausagen

Bedingungen	Aussagen
(B. 7.), (B. 8.)	(2) ist global lösbar
(B. 7.), (B. 8.)	(2) ist lösbar für ein $\tilde{y} \in R_+^n$ \Rightarrow (2) ist lösbar für alle $y \in [0, \tilde{y}]$
(B. 7.), (B. 8.), (B. 9)	(2) ist lösbar für ein $y = \tilde{y} > 0$ \Rightarrow (2) ist lösbar für alle $y \in R_+^n$
(B. 7.), (B. 8.), (B. 9)	(2) ist lösbar für ein $y = \tilde{y} > 0$ \Rightarrow (2) ist eindeutig lösbar für alle $y = \tilde{y} > 0$
(B. 10.)	(2) ist eindeutig global lösbar
(B. 4.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 11.)	(2) ist global lösbar
(B. 4.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 11.), (B. 12.)	(2) ist eindeutig global lösbar
(B. 4.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 13.)	(2) ist eindeutig global lösbar
(B. 4.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 14.)	(2) ist eindeutig global lösbar
(B. 4.), (B. 7.), (B. 8.), (B. 14.)	(2) ist lösbar für ein $y = \tilde{y} > 0$ \Rightarrow (2) ist lösbar für alle $y \in R_+^n$
(B. 3.), (B. 15.), (B. 16.), (B. 17.)	(2) ist eindeutig global lösbar
(B. 7.), (B. 15.), (B. 16.), (B. 19.)	(2) ist global lösbar
(B. 7.), (B. 15.), (B. 16.), (B. 18.), (B. 19.)	(2) ist global lösbar

Literaturverzeichnis:

- [1] Bagrinovskij, K. A.; Berljang, E. L.:
Matematiceskie voprosy postrojénia systemy modelej.
Novosibirsk 1976.
- [2] Bód, Pétér:
Nemlinéaris ágazatközi kapcsolatok matematikai vizsgálata.
Sigma, 1978 (5), Nr. 4, S. 251-264.
- [3] Collatz, C. H. :
Aufgaben monotoner Art.
Arch. Math. 3, 1953, S. 366-376.
- [4] Cottle, Richard; Veinott, Arthur P. :
Polyhedral Sets Having a Least Element.
Mathematical Programming 3 (1972), S. 238-249.
- [5] Grönberg, Rolf:
Diagnose und Prognose von Veränderungen der Inputkoeffizienten in offenen Input-
Output-Systemen (Dissertation).
Augsburg 1980.
- [6] Kossow, W. W.:
Verflechtungsbilanzierung. Theorie und praktische Anwendungen.
Berlin 1975.
- [7] Krasnoselski, M. A.:
Polozitelnye operatornych upravlenij.
Moskva 1964.
- [8] Krasnoselski, M. A. u. a.:
Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen.
Berlin 1973.
- [9] Kreiger, R. G.:
Solving Non-Linear Input-Output Systems.
In: Gossling, W. F.: Medium Term Dynamic Forecasting.
London 1977.
- [10] Lahiri, S.:
A Note on Non-linear Input-Output Analysis.
Technical Report No. Econ. 1/74, Research Training School.
Indian Statistical Institute, Calcutta, 1974.
- [11] Lahiri, Sajal:
Input-Output Analysis with Scale-Dependent Coefficients.
In: Econometrica, Vol. 44, No. 51(1976), S. 947-961.

- [12] Lahiri, Sajal; Pyatt, Graham:
On the Solution of Scale-Dependent Input-Output Models.
In: *Econometrica*, Vol. 48, No. 7(1980), S. 1827-1830.
- [13] Leontief, W. W.:
Input-Output Economics.
London-New York 1966.
- [14] Mikó, Gyula:
Non-Linear Input-Output Models.
In: *Input-Output Techniques. Proceedings of the third Hungarian Conference on Input-Output Techniques*, 3-5 November 1981, Budapest, 1982, S. 326-332,
- [15] Müller, Ludger:
Betriebswirtschaftliche Input-Output-Modelle mit monoton wachsenden Inputfunktionen (Dissertation).
Mannheim 1976.
- [16] Nataf, André:
Systèmes Economiques de Production a Rendement Croissant.
In : *Publication de l'Institut des Statistique de l'Université de Paris*, Vol. XV Fsc 2(1960), S. 161-170.
- [17] Nikaido, Hukukane:
Convex Structures and Economic Theory.
New York-London 1968.
- [18] Radcenko, V. V.; Stecenko, V. Ja.:
Primenia metoda Newtona-Kantorovica dlja rasceta nelinejnovo mezotraslevovo balansa.
In: *Modeli i metody analiza ekonomiceskych celenapravlennych systemy*.
Novosibirsk 1977, S. 160-166.
- [19] Reinholdt, Werner:
On M-Functions and Their Application to Non-linear Gauss-Seidel Iteration and to Network Flows.
Birlinghoven 1969.
- [20] Rüllkötter, Joachim:
Input-Output-Systeme mit nicht notwendig isotonen Inputfunktionen (Dissertation).
Mannheim 1976.
- [21] Sandberg, I. W.:
A Non-Linear Input-Output Model of a Multisectoral Economy.
In: *Econometrica* 41 (1973), S. 1167-1182.
- [22] Siassi, J.:
Statische Leontief-Modelle mit nichtlinearen Lieferbeziehungen.
Vortrag auf der VI. Wissenschaftlichen Tagung „Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie“, Rostock, 21.- 25.1.1980.

- [23] Siassi, J:
 Statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Aufwandsfunktionen.
 Vortrag auf der VIII. Wissenschaftlichen Tagung „Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie“, Magdeburg, 10-13, September 1985.
- [24] Siassi, J.:
 Verfahren zur Lösung von statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen.
 In: Fo-Inf. D. Sektion Leitung, Informationsverarbeitung und Statistik, Hochschule für Ökonomie “Bruno Leuschner”, Berlin, H. 3/85 (10), S. 62-72.
- [25] Siassi, J.:
 Verfahren zur Lösung nichtlinearer Input-Output-Modelle.
 Postervortrag auf dem Mathematiker-Kongress der DDR, 10.- 14. Februar 1986, Rostock
- [26] Siassi, J.:
 Primärressourcen in statischen volkswirtschaftlichen Verflechtungsmodellen mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen.
 Vortrag auf der Konferenz „Anwendung mathematischer Modelle und Methoden und der Rechentechnik bei der Leitung der Volkswirtschaft“, Bratislava, 21.- 24. April 1986.
- [27] Siassi, J.:
 Die Optimierung statischer volkswirtschaftlicher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen.
 In: Fo-Inf. D. Sektion Leitung, Informationsverarbeitung und Statistik, Hochschule für Ökonomie “Bruno Leuschner”, Berlin, H. 3/86 (11).
- [28] Siassi, J.:
 Statische volkswirtschaftliche Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Materialaufwandsfunktionen (Manuskript).
 In: Ausgewählte Probleme der Anwendung mathematischer Methoden in der Ökonomie.
 Autorenkollektiv des Lehrstuhls für Ökonometrie an der Hochschule für Ökonomie Prag und des Wissenschaftsbereichs Operationsforschung der Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner“ Berlin. Reihe Acta Oeconomica Pragensia der HfÖ Prag (Voraussichtliches Erscheinungsdatum: 1987).
- [29] Siassi, Jilla:
 Möglichkeiten und Probleme der Anwendung statischer volkswirtschaftlicher Verflechtungsmodelle mit nichtlinearen Material- und Primärressourcenaufwandsfunktionen (Dissertation B).
 Hochschule für Ökonomie „Bruno Leuschner“ Berlin, August 1987.
- [30] Stecenko, V. Ja.; Tumanopv, L. A.; Sutov, V. G.:
 K teorii nelinejnych modelej mezostraslevovoj balansa.
 In: Modeli i metody analizy ekonomiceskich celonapravlennych systemy. Novosibirsk 1977, S. 166-176.

- [31] Steffens, Franz:
Input-Output-Systeme mit Intervallweise definierten Inputfunktionen.
In: Hansen-Robert (Hrsg.): Informationssysteme im Produktionsbereich, Beitrag zum 3. Wirtschaftsinformatik-Symposium der IBM Deutschland, München-Wien 1975.
- [32] Tamir, A. :
Minimality and Complementary Properties Associated with Z-Functions and M-Functions.
In: Mathematical Programming 1974, S. 7-31.
- [33] Wintgen, G.:
Indifferente Optimierungsprobleme.
In: Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie. Internationale Tagung – Berlin, Oktober 1964, Konferenzprotokoll, Teil II, Berlin 1965, S. 3-6.
- [34] Wintgen, G.:
Indifferente Optimierungsprobleme.
In: Operations-Research-Verfahren VI, Herausgegeben von Horst Schubert, I. Oberwolfach-Tagung über Operations Research, 18.-24. August 1968, Mannheim, S. 233-236.